Interrogation n°18. Corrigé

1) a) Comme f admet un extremum en $\overrightarrow{0}$, alors $\nabla f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

Posons $A = H_f(0,0)$. On a $f(X) = f(\overrightarrow{0}) + \frac{1}{2}X^T AX + \mathfrak{o}\left(\|X\|^2\right)$, car $\nabla f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

Supposons par l'absurde A non positive. Alors il existe un vecteur propre Z de valeur propre $\lambda < 0$.

On a alors $f(tZ) = f(\overrightarrow{0}) + \frac{1}{2}\lambda \|Z\|^2 t^2 + \mathfrak{o}\left(t^2\right)$ lorsque $t \to 0$, donc $f(tZ) < 0$ pour t assez petit non nul.

Ce qui contredit que f admet en $\overrightarrow{0}$ un minimum local.

Remarque : On peut être tenté de ne pas raisonner par l'absurde.

On fixe Z et on veut montrer $Z^T AZ \geq 0$. On a $f(tZ) - f(\overrightarrow{0}) = \frac{1}{2}Z^T AZ\ t^2 + \mathfrak{o}\left(t^2\right)$.

Donc $\frac{1}{2}Z^T AZ + \mathfrak{o}(1) \geq 0$ lorsque $t \to 0$. Par passage à la limite, $Z^T AZ \geq 0$.

b) Les valeurs propres λ et μ de $H_f(0,0)$ sont positives, donc $\det H_f(0,0) = \lambda\mu \geq 0$.

Or, $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix}$, donc $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 \leq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.

2) $df(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par $df(x) \cdot h = \nabla f(x) \cdot h$.

Remarque : $df(x)$ est ici une forme linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

3) a) Les solutions sont les $f(x,y) = a(y)\cos x + b(y)\sin(x)$, où a et b sont de classe C^2.

Pour prouver que a et b de classe C^2, on peut noter que $a(y) = f(0, \frac{\pi}{2})$ et $b(y) = f(\frac{\pi}{2}, 0)$.

b) On prend $g(u,v) = f(x,y)$, avec $(x,y) = (u, u+v)$, c'est-à-dire $(u,v) = (x, y-x)$.

On a $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(u, u+v)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(u, u+v)$.

Donc f vérifie (E) ssi $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + g(u,v) = 0$, donc $g(u,v) = a(v)\cos(u) + b(v)\sin(u)$.

Les solutions de (E) sont donc les $f(x,y) = a(y-x)\cos x + b(y-x)\sin x$, avec a et b de classe C^2.

Remarque : Si on utilise un autre changement de variable, on obtiendra des expressions différentes, mais globalement équivalentes, par exemple $a(y-x)\cos y + b(y-x)\sin y$.

4) a) *Première solution* :

Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers (x,y) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq 0$.

Alors $x \geq 0$. Donc le complémentaire de U est fermé, et ainsi, U est ouvert.

Seconde solution :

U est l'image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \longmapsto x$.

b) *Remarque* : L'application $\varphi : (x,y) \longmapsto (x,t) = (x, y/x)$ est un difféomorphisme de U sur U.

On a pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,tx) + t\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,tx) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, où $y = tx$..

c) f vérifie (E) ssi $x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \lambda g(x,t)$, donc ssi $g(x,t) = \varphi(t)x^{\lambda}$, où φ de classe C^1 (car $\varphi(t) = g(1,t)$).

Ainsi, les solutions de (E) sont les $f(x,y) = K\left(\dfrac{y}{x}\right)x^{\lambda}$, où $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

5) T est fermé et borné, donc compact. La fonction f est une fonction polynomiale donc continue.

Par le th des bornes atteintes, f est bornée sur le compact T et atteint son sup.

f est positive non identiquement nulle et est nulle sur le bord de T.

Donc f atteint son sup en un point $(x_1, ..., x_n)$ appartenant à l'intérieur de T.

Comme f de classe C^1 sur son intérieur, on a $\nabla f(x_1, ..., x_n) = \overrightarrow{0}$.

On a ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)\left(\dfrac{1}{x_j} - \dfrac{1}{1 - x_1 - ... - x_n}\right) = 0$.

Donc les x_j sont égaux à un même réel x, qui vérifie $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1-nx}$, c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{1+n}$.

Donc $\sup f = f\left(\dfrac{1}{1+n}, ..., \dfrac{1}{1+n}\right) = \left(\dfrac{1}{1+n}\right)^n\left(1 - n\,\dfrac{1}{1+n}\right) = \left(\dfrac{1}{1+n}\right)^{n+1}$.

Preuve plus directe . Par convexité, on a $x_1 ... . x_n \leq y^n$, où $y = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n} \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$.

Pour $(x_1, ..., x_n) \in T$, on a $(y, ..., y) \in T$, donc $f(x_1, ..., x_n) \leq f(y, y, ..., y) = y^n(1-y)$.

Donc $\sup_T f \leq \sup_{y\in[0,1/n]}\ (y^n(1-y))$ qui est atteint en $y = \dfrac{n}{n+1}$.

6) a) Pour $x \neq y$, $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \dfrac{1}{x-y}\int_x^y f'(\theta)\ d\theta$.

On effectue le changement de variable $\theta = x + (y-x)t$, où $t \in [0,1]$.

On obtient bien $F(x,y) = \int_0^1 f'(x + t(y-x))\ dt$.

D'autre part, lorsque $x = y$, $\int_0^1 f'(x + t(y-x))\ dt = \int_0^1 f'(x)\ dt = f'(x) = F(x,x)$. D'où le résultat.

b) Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers (x,y). On pose $J_n = F(x_n, y_n) = \int_0^1 f'(x_n + t(y_n - x_n))\ dt$.

La suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc pour $n \geq n_0$ assez grand, $\max(|x_n - x|, |y_n - x|) \leq 1$.

On note que $\forall t \in [0,1]$, $x_n + t(y_n - x_n) \in [x_n, y_n]$.

Donc $\forall n \geq n_0$, $|f'(x_n + t(y_n - x_n))| \leq \sup_K |f'|$, où $K = [\min(x,y) - 1, \max(x,y) + 1]$.

On applique le théorème de convergence dominée : $\forall n \geq n_0$, $|f'(x_n + t(y_n - x_n))| \leq \sup_K |f'| = \varphi(t)$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^1 f'(x + t(y-x))\ dt$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} F(x_n, y_n) = F(x,y)$.

Remarque : L'essentiel est de trouver une fonction de domination $\varphi(t)$ qui soit valable pour toute valeur de (x', y') dans un voisinage de (x,y).

c) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\int_0^1 t\ f''(x + t(y-x))\ dt$ par le th de dérivation sur les intégrales.

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \int_0^1 t\ f''(x + t(y-x))\ dt$. On montre comme au b) que ces fonctions sont continues.

Remarque : De façon plus générale, on montre que F est de classe C^{∞}.

7) a) Par le th de Schwarz, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, donc $g(x) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,v)\right]_{v=c}^{v=d} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,d) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,c)$.

On a donc $\int_a^b g(u)\ du = [f(x,d) - f(x,c)]_{x=a}^{x=b} = f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c)$.

b) Posons $F(x,y) = f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0) = \int_0^x \left(\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,v)\ dv \right)\ du$.

Comme $F(0,0) = 0$, alors par le TAF, $\exists\, u \in [0,x]$ tel que $F(x,y) = x\frac{\partial F}{\partial x}(u,y)$.

Or, on a $\frac{\partial F}{\partial x}(u,y) = \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,v)\ dv$. En particulier, $\frac{\partial F}{\partial x}(u,0) = 0$.

Par le TAF, $\exists\, v \in [0,y]$ tel que $F(x,y) = y\frac{\partial F}{\partial y \partial x}(u,v)$. On conclut avec $\frac{\partial F}{\partial y \partial x}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,v)$.

Autre méthode : Par a), $f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0) = \int_0^x \left(\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,v)\ dv \right)\ du$.

On va conclure par la formule de la moyenne. Posons $m = \inf_{[0,x]\times[0,y]} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $M = \sup_{0,x]\times[0,y]} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

On a $\int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,v)\ dv\ du$ compris entre $\int_0^x \int_0^y m\ dv\ du = mxy$ et $\int_0^x \int_0^y M\ dv\ du = Mxy$.

Donc il existe $(u,v) \in [0,x] \times [0,y]$ tel que $\int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,v)$.

Remarque : On vérifie aisément que l'image d'une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ par une fonction continue g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est un intervalle : en effet, si $g(a) = m$ et $b(b) = M$, alors $t \longmapsto g(a + t(b-a))$ est continue sur $[0,1]$ donc par le TVI, toute valeur comprise entre m et M est atteinte par g.

8) a) E est le noyau de l'application linéaire $u : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\ \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \left(u_{n+p} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k} \right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Donc E est un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Par ailleurs, l'application $\varphi : E \to \mathbb{C}^p\ \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_0, ..., u_{p-1})$ est bijective (cf récurrence d'ordre p).

Donc φ est un isomorphisme linéaire, et $\dim E = p$.

b) *Question supplémentaire*

On a $P(X) = X^p - \frac{1}{p}\frac{X^p - 1}{X-1}$, et $P'(X) = pX^{p-1} - \frac{X^{p-1}}{X-1} + \frac{1}{p}\frac{X^p-1}{(X-1)^2}$.

On vérifie d'abord que $P(1) = 0$ et $P'(1) \neq 0$. Donc 1 est racine simple.

Supposons $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$. Alors $p\lambda^{p-1} - \frac{\lambda^{p-1}}{\lambda - 1} + \frac{\lambda^p}{\lambda-1} = 0$, donc $p + \frac{1}{\lambda-1} = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 1 - \frac{1}{p}$.

Or, $P(\lambda) = \lambda^p - (\lambda^p - 1) = 1$, donc $P(\lambda) \neq 0$.

c) Soit λ une racine de P telle que $|\lambda| \geq 1$.

On a $|\lambda^p| \geq \left|\lambda^k\right|$ pour tout $0 \leq k < p$, donc $\lambda^p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \lambda^k$ implique que les λ^k soient colinéaires de même sens à λ^p, et de même module, ce qui donne l'unique solution $\lambda = 1$.

d) On vérifie que les $(\lambda_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E (car l'équation caractéristique est ici $P(\lambda) = 0$).

La famille, pour $0 \leq j < p$, est libre (car la matrice de Van der Monde $(\lambda_j^i)_{0\leq i<p, 0\leq j<p}$ est inversible).

Comme $\dim E = p$, alors $E = \mathrm{Vect}((\lambda_j^n)_{n\in\mathbb{N}},\ 0 \leq j < p\}$.

Autre argument : Posons $X_n = (u_n, ..., u_{n+p-1})$. On a $X_{n+1} = AX_n$; où A est une matrice compagnon dont le polynôme caractéristique est P. Donc A est diagonalible et $A^n = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_0^n, ..., \lambda_{p-1}^n)P^{-1}$.

Ce qui implique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Vect}((\lambda_j^n)_{n\in\mathbb{N}},\ 0 \leq j < p\}$.

e) Par d), il existe $(\alpha_0, ..., \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j (\lambda_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par c), on a $\lambda_0 = 1$ et $\forall j \in \{1, 2, ..., p-1\}$, $|\lambda_j| < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n$ existe et vaut α_0.

9) On a $N(u) = \sup_{x\in E\setminus\{\overrightarrow{0}\}} \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} = \sup_{x\in E\setminus\{\overrightarrow{0}\}} \left\langle \dfrac{x}{\|x\|}, u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\rangle$.

Lorsque x décrit $E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ décrit S, d'où $N(u) = \sup_{x\in s} \langle y, u\,(y)\rangle$.

$x \longmapsto \langle x, u\,(x)\rangle$ est continue sur le compact S, donc atteint son maximum en un point x_0.

b) Posons $a(t) = \langle u(x_0 + th), x_0 + th\rangle = \langle u(x_0), x_0\rangle + 2t\,\langle u(x_0), h\rangle + \langle u(h), h\rangle$.

Et $b(t) = \|x_0 + th\|^2 = \|x_0\|^2 + 2t\,\langle x_0, h\rangle + t^2\,\|h\|^2 = 1 + 2t\,\langle x_0, h\rangle + t^2\,\|h\|^2$.

On fait un DL_1 en $t = 0$: on a $\varphi(t) = \dfrac{\langle u(x_0), x_0\rangle + 2t\,\langle u(x_0), h\rangle + \mathfrak{o}\,(t)}{1 + 2t\,\langle x_0, h\rangle + \mathfrak{o}\,(t)}$.

D'où $(\langle u(x_0), x_0\rangle + 2t\,\langle u(x_0), h\rangle)\,(1 - 2t\,\langle x_0, h\rangle) + \mathfrak{o}\,(t)) = 0$.

Donc $\varphi'(0) = \langle u(x_0), x_0\rangle - \langle u(x_0), h\rangle\,\langle x_0, h\rangle$.

Comme φ admet en $t = 0$ un maximum global, alors $\varphi'(0) = 0$, donc $\langle u(x_0), h\rangle = \langle u(x_0), x_0\rangle\,\langle x_0, h\rangle$.

c) On a ainsi $\forall h$, $\langle u(x_0) - \langle u(x_0), x_0\rangle\, x_0, h\rangle = 0$, donc $u(x_0)\,\|x_0\|^2 = \langle u(x_0), x_0\rangle\, x_0$.

Donc $u(x_0) = \lambda x_0$, avec $\lambda = \dfrac{\langle u(x_0), x_0\rangle}{\|x_0\|^2}$. Ainsi, x_0 est un vecteur propre de u.