**Interrogation n°18**. *Barème sur 25 pts. Durée 1h30mn*

**1)** [4 pts] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto f(x, y)$ de classe $C^2$.

On suppose que $f$ admet en $(0, 0)$ un minimum local.

a) Montrer la propriété du cours : La matrice Hessienne $H_f(0, 0)$ est positive, c'est-à-dire $H_f(0, 0) \in S_2^+(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)\right| \leq \sqrt{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)}$.

**2)** [1 pt] Soit $f : U \to \mathbb{R} \quad x = (x_1, ..., x_p) \longmapsto f(x_1, ..., x_p)$ de classe $C^1$, où $U$ ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Expliciter sans justification, en utilisant le gradient, la différentielle $df(x)$ de $f$ en $x$.

On précisera notamment l'ensemble de définition de $df(x)$.

*Rappel sur la notation* : On rappelle que l'image d'un vecteur $h$ par $df(x)$ se note $df(x) \cdot h$.

**3)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$.

a) [1 pt] Donner sans justification les solutions de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f = 0$.

b) [2 pts] Résoudre $(E)$ : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f = 0$.

*Indication* : Utiliser $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$, où $g(u, v) = f(au + bv, cu + dv)$ avec $a, b, c, d$ bien choisis.

*Remarque culturelle* : On peut noter que $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2$.

**4)** On considère $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Soit $f : U \to \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto f(x, y)$.

a) [0.5 pt] Montrer que $U$ est ouvert.

b) [0.5 pt] Pour $(x, t) \in U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose $g(x, t) = f(x, tx)$. Donner sans justification $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$.

c) [1.5 pt] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre $(E)$ : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda f$ sur $U$.

**5)** [2 pts] On considère le compact $T = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \ .... \ , x_n \geq 0 \text{ et } x_1 + .... + x_n \leq 1\}$.

Déterminer $\sup_T f$, où $f(x_1, ..., x_n) = x_1....x_n \ (1 - x_1 - ... - x_n)$.

**6)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty$.

On considère $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y \\ f'(x) \text{ si } x = y \end{cases}$

a) [1 pt] Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \int_0^1 f'(x + t(y - x)) \, dt$.

b) [1.5 pt] Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

c) [1 pt] Donner (*en deux ou trois lignes*) les idées permettant de prouver que $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**7)** Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ une fonction de classe $C^2$.

a) [2 pts] Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Montrer que $f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) + f(a, c) = \int_a^b g(u)\ du$, où $g(x) = \int_c^d \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, v)\ dv$.

b) [1.5 pt] Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $(u, v) \in [0, x] \times [0, y]$ tel que

$$f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) = xy \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) (u, v)$$

**8)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = \dfrac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k}\}$.

a) [1 pt] Montrer que $E$ est un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et préciser sa dimension.

b) *Question supplémentaire hors-interrogation*

Montrer que le polynôme $P(X) = X^p - \dfrac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} X^k$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

c) [1 pt] Soit $\lambda$ racine de $P$ distincte de 1. Montrer que $|\lambda| < 1$.

d) [1 pt] On note $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1$, ... , $\lambda_{p-1}$ les racines de $P$. Montrer que $E = \text{Vect}((\lambda_j^n)_{n \in \mathbb{N}},\ 0 \leq j < p\}$.

e) [0.5 pt] Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

**9)** ($\bigstar$) *Une preuve du théorème spectral*

(La difficulté est de prouver que tout endomorphisme symétrique $u$ admet une valeur propre).

Soit $u$ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $E$ : On a $\langle x, u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle$.

On note $S$ la sphère unité et $N(u) = \sup_{\overrightarrow{x} \in E \setminus \{\overrightarrow{0}\}} \dfrac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2}$.

a) [0.5 pt] Montrer qu'il existe $x_0 \in S$ tel que $N(u) = \langle x_0, u(x_0) \rangle$.

b) [1 pt] Soit $h \in E$. On considère $\varphi : t \longmapsto \dfrac{\langle u(x_0 + th), x_0 + th \rangle}{\|x_0 + th\|^2}$ définie au voisinage de 0.

En utilisant $\varphi$, montrer que $\langle u(x_0), h \rangle = \langle u(x_0), x_0 \rangle \langle x_0, h \rangle$.

c) [0.5 pt] Montrer que $x_0$ est un vecteur propre de $u$.