Interrogation n°17. Corrigé

1) On a $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n},0,0,...,0\right) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} \neq 1$.

On en déduit que f n'admet pas de limite en $\overrightarrow{0}$.

2) On a aussi $f(x,0) = \varphi(|x|) = \mathfrak{o}\ (x)$, car $\varphi'(0) = 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a : $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \left|\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\right| \to 0$ lorsque (x,y) tend vers 0.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue en $(0,0)$.

Remarque : On peut aussi prouver que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ en utilisant le th du prolongement C^1.

En effet, posons $g(x) = f(x,0) = \varphi(|x|)$. On a $\forall x \neq 0$, $g'(x) = \frac{x}{|x|}\varphi'(|x|)$ qui tend vers 0 lorsque $x \to 0$.

Par le théorème du prolongement C^1, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

3) a) L'application $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}\ \ t \longmapsto f(tx)$ est dérivable, et $\varphi'(t) = \nabla f(tx) \cdot x$.

Comme $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\ dt$, alors on obtient $f(x) = f(0) + \int_0^1 \nabla f(tx) \cdot x\ dt$.

b) Supposons $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Alors $\nabla f(x) = \overrightarrow{0}$ pour tout x. Par a), $f(x) = f(0) + \int_0^1 0 = f(0)$.

Réciproquement, toute fonction f constante convient. Les solutions sont donc les solutions constantes.

c) Supposons $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Par a), les $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont constantes. Donc il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x$, $\nabla f(x) = v$.

Donc $f(x) = f(0) + \int_0^1 v \cdot x\ dt = f(0) + v \cdot x$.

Réciproquement, toute fonction affine $f : x \longmapsto v \cdot x + b$ convient :

On a $f(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j x_j + b$, donc $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = v_j$, donc $\nabla f(x) = v$ constante.

4) La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, z^n$ admet le même rayon de convergence R.

L'application $g : [0,R[\to \mathbb{C}\ \ r \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\, r^n$ est continue comme somme d'une série entière.

D'autre part, $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\, r^n = g(r)$, où $r = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$.

On a $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$. Par pincement, on a donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

Remarque : Le programme officiel admet en fait la continuité de f sur tout le disque ouvert $D(0,R)$.

5) a) On a $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\ dt$.

b) On a $J(x) = F(\omega(x),x)$. Comme F et ω sont C^1, alors J est C^1.

Et $J'(x) = \omega'(x)\frac{\partial F}{\partial x}(\omega(x),x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\omega(x),x) = \omega'(x) f(\omega(x),x) + \int_0^{\omega(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(t,x)\ dt$.

6) On a $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) + \sin\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(M) = -r\sin\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) + r\cos\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$.

Donc $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + 2\sin\theta\cos\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M) + \sin^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$.

Et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = r^2\sin^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) - 2r^2\sin\theta\cos\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M) + r^2\cos^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) - r\cos\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) - r\sin\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$.

On conclut $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$ car $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

7) a) On a $\lim_{n\to+\infty} \|\overrightarrow{x_n}\| = \|\overrightarrow{x}\|$ donc $(\|\overrightarrow{x_n}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On pose $R = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\overrightarrow{x_n}\|$.

Notons D le disque de centre $\overrightarrow{0}$ et de rayon R dans $\mathbb{R}^p$.

Il existe $M = \sup_{[0,1]\times D} |f(t,\overrightarrow{x})|$, qui existe car f continue sur $K = [0,1]\times D$ qui est un compact de $\mathbb{R}^{p+1}$.

On a alors $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(t,\overrightarrow{x_n})| \le M$.

b) Soit $(\overrightarrow{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^p$ convergeant vers $\overrightarrow{x}$.

On applique le th de convergence dominée appliquée à $I_n = \int_0^1 g_n(t)\ dt$, avec $g_n(t) = f(t,\overrightarrow{x_n})$.

On a $\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = f(t,\overrightarrow{x})$ par continuité de f.

On a $\forall t \in [0,1]$, $|g_n(t)| \le \varphi(t) = M$ définie au a) et φ est bien intégrable sur $[0,1]$

On en déduit par convergence dominée que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f(t,\overrightarrow{x})\ dt$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} F(\overrightarrow{x}_n) = F(\overrightarrow{x})$. Par caractérisation séquentielle, on en déduit que F est continue.

On a $\forall t \in [0,1]$, $|g_n(t)| \le \varphi(t) = M$, où $M = \sup_{[0,1]\times D} |f(t,\overrightarrow{x})|$, qui existe car $[0,1]\times D$ compact.

8) a) On a $f(\overrightarrow{x}) = \int_0^1 \nabla f(tx)\cdot x\ dt = \sum_{k=1}^n x_k g_k(x_1,...,x_n)$, avec

$$g_k(x_1,...,x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(tx_1,...,tx_n)\ dt$$

Les g_k sont continues par la question 7) appliquée aux fonctions $(t,\overrightarrow{x}) \longmapsto \dfrac{\partial f_k}{\partial x_k}(t\overrightarrow{x})$.

b) On a $f(x,y) = xg(x,y) + yh(x,y)$ n'est pas modifiée en ajoutant y à $g(x,y)$ et $-x$ à $h(x,y)$.

9) a) Supposons (i). Soient x et $\omega \in \mathbb{R}^p$. Soit $\lambda \in [0,1]$ et $(t,s) \in \mathbb{R}$.

On a $\varphi(\lambda t + (1-\lambda)s) = f(x + (\lambda t + (1-\lambda)s)\omega) = f(\lambda(x+t\omega) + (1-\lambda)(x+s\omega))$.

Donc $\varphi(\lambda t + (1-\lambda)s) \le \lambda f(x+t\omega) + (1-\lambda)f(x+s\omega) = \lambda\varphi(t) + (1-\lambda)\varphi(s)$.

Donc φ est convexe.

Supposons (ii). Soient $x, y \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda \in [0,1]$. Posons $\omega = y - x$.

Alors $\lambda x + (1-\lambda)y = x + (1-\lambda)\omega$.

Par (ii), $\varphi(1-\lambda) = \varphi(\lambda\times 0 + (1-\lambda)\times 1) \le \lambda\varphi(0) + (1-\lambda)\varphi(1)$.

Donc $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \varphi(1-\lambda) \le \lambda\varphi(0) + (1-\lambda)\varphi(1) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

b) Supposons f convexe, c'est-à-dire les fonctions $\varphi : t \longmapsto f(x+t\omega)$ convexes.

On a $\varphi'(t) = \nabla f(x+t\omega)\cdot\omega$. Comme φ' est croissante, $\varphi'(1) \ge \varphi'(0)$.

Donc $\nabla f(x+\omega)\cdot\omega \ge \nabla f(x)\cdot\omega$, c'est-à-dire $(\nabla f(y) - \nabla f(x))\cdot(y-x) \ge 0$.

Réciproquement, supposons $\forall (x,y), \quad (\nabla f(y) - \nabla f(x)) \cdot (y-x) \geq 0$.

On a en particulier $(\nabla f(x+t\omega) - \nabla f(x+s\omega)) \cdot (t-s)\omega \geq 0$, donc $(\varphi'(t) - \varphi'(s))\ (t-s) \geq 0$.

On en déduit que φ' est croissante, c'est-à-dire φ convexe.