Interrogation n°17. *Barème sur 24.5 pts. Durée 1h15mn*

1) [1 pt] Soit $\boxed{p \geq 2}$.

L'application $f : \mathbb{R}^p \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto \dfrac{\|x\|_2}{\|x\|_1}$ est-elle prolongeable par continuité en $\overrightarrow{0}$?

Rappel : $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$ et $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^p |x_i|$.

2) [2.5 pts] Soit $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 vérifiant $\varphi'(0) = 0$.

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$. Expliciter $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

3) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; x \longmapsto f(x)$, où $x = (x_1, ..., x_n)$. On suppose f de classe C^1.

a) [1.5 pt] Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\boxed{f(x) = f(0) + \int_0^1 \nabla f(tx) \cdot x \; dt}$.

Remarque : La notation $\nabla f(tx) \cdot x$ désigne le produit scalaire de $\nabla f(tx)$ et de x.

b) [0.5 pt] Déterminer les fonctions f vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

c) [2 pts] On suppose f de classe C^2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ pour tous $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

(ii) f est affine c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = v \cdot x + b$.

4) [1.5 pt] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. On note $D(R)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R.

On considère $F : D(R) \to \mathbb{C}$ définie par $F(x, y) = f(x + iy)$, où $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Montrer que F est continue en $(0,0)$.

Indication : Exploiter la propriété connue de continuité des séries entières à variable réelle.

5) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \to f(x, y)$ de classe C^1. On pose $F(x, y) = \int_0^x f(t, y) \; dt$.

a) [1 pt] On admet que F est de classe C^1. Expliciter *sans justification* $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

b) [1.5 pt] On pose $\boxed{J(x) = \int_0^{\omega(x)} f(t, x) \; dt}$, où $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

Déduire de a) la valeur de $J'(x)$.

6) [3 pts] *Laplacien en coordonnées polaires*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On pose $\Delta f = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$. On fixe $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $g(r, \theta) = f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) = f(M_0 + re^{i\theta})$. Montrer que

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \right)(r, \theta) = \Delta f(M_0 + re^{i\theta})$$

7) Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}\ \ (t, \overrightarrow{x}) \to f(t, \overrightarrow{x})$ une application continue.

a) [1.5 pt] Soit $(\overrightarrow{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^p$ convergeant vers un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^p$.

Montrer qu'il existe M telle que $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(t, \overrightarrow{x_n})| \leq M$.

b) [1.5 pt] On pose

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^p,\ \ F(\overrightarrow{x}) = \int_0^1 f(t, \overrightarrow{x})\ dt$$

Montrer que F est continue.

8) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $f(\overrightarrow{0}) = 0$.

a) [2.5 pts] En utilisant la formule du 3) a), montrer qu'il existe $g_1, ..., g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k g_k(x_1, ..., x_n)$$

b) [0.5 pt] On prend $n = 2$. Montrer par un exemple que la décomposition n'est pas unique.

9) a) [2 pts] Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \quad \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

(ii) Pour tous $x \in \mathbb{R}^p$ et $\omega \in \mathbb{R}^p$, la fonction partielle $\varphi : t \longmapsto f(x + t\omega)$ est convexe.

b) (★) [2 pts] On suppose $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

Montrer que f est convexe ssi $\forall (x, y), \quad (\nabla f(y) - \nabla f(x)) \cdot (y - x) \geq 0$.

Indication : Faire intervenir les $\varphi'(t)$, et en particulier $\varphi'(1) - \varphi'(0)$.