Interrogation n°16. Corrigé

1) soient x et $y \in \overline{A}$, et $\lambda \in [0,1]$. On pose $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

Par définition de l'ahérence, il existe des suites dans A telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$.

Donc $z = \lim_{n\to+\infty} z_n$, où $z_n = \lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in A$ convexe. Donc $z \in \overline{A}$. D'où le résultat.

2) a) Le triangle a, b, x est isocèle en x, donc la médiane $[c, x]$ est la médiatrice de $[a, b]$.

ainsi, $x - c$ et $b - a$ sont orthogonaux. Les relations se déduisent alors de Pythagore.

Remarque : De façon générale, si $\|u\| = \|v\|$, alors les vecteurs $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux.

b) (*existence*) L'application $f : A \to \mathbb{R} \quad a \longmapsto \|x - a\|$ est continue (car 1-lipschitzienne).

Comme A est compact non vide, f atteint son minimum.

(*unicité*) Supposons par l'absurde qu'il existe $a \neq b$ dans A tels que $\|x - a\| = \|x - b\| = d(x, A)$.

Par a), on a $\|x - c\| < d(x, A)$ et $c \in A$, ce qui est absurde.

c) Dans $(\mathbb{R}^2, \|\|_\infty)$, on considère A le segment reliant $(1, -1)$ et $(1, 1)$. Ainsi, A est inclus dans la sphère unité.

A est convexe compact mais le point $(0, 0)$ est équidistant de *tout* point de A.

d) La propriété du b) reste vraie en remplaçant A compact par A fermé.

En prenant r assez grand, on se ramène en effet à la distance de x au compact convexe $B(x, r) \cap A$.

3) (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Comme $u(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, il existe $\alpha > 0$ tels que $\forall x \in E, \|x\| \leq \alpha \Rightarrow \|u(x)\| \leq 1$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Pour x non nul, on considère $y = \alpha \dfrac{x}{\|x\|}$, donc $\|u(y)\| \leq M$, d'où $\|u(x)\| \leq \dfrac{M}{\alpha} \|x\|$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Par linéarité, $\|u(x) - u(y)\| \leq k \|x - y\|$, donc u est lipschitzienne donc continue.

4) a) - $O_p(\mathbb{R})$ est bornée : Les colonnes de $A \in O_p(\mathbb{R})$ sont de norme euclidienne 1.

Donc les coefficients a_{ij} sont bornés par 1, c'est-à-dire $|a_{ij}| \leq 1$.

- $O_p(\mathbb{R})$ est fermé, car défini par l'équation $A^T A = I_p$ qui est stable par passage à la limite :

Si $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ et $A_n^T A_n = I_p$, alors $A^T A = I_p$ par continuité de $A \longmapsto A^T A$.

b) $\operatorname{tr}(D^T U) = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_{jj} \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j|$ car $|u_{jj}| \leq 1$.

On a égalité pour $U = \operatorname{Diag}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p) \in O_p(\mathbb{R})$, où $\varepsilon_j = \begin{cases} 1 \text{ si } \lambda_j \geq 0 \\ -1 \text{ si } \lambda_j < 0 \end{cases}$

c) Par le th spectral, il existe $V \in O_p(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ telles que $A = V^T D V$.

On a alors $\operatorname{tr}(A^T U) = \operatorname{tr}(V^T D V U) = \operatorname{tr}(D V U V^T)$.

Lorsque U décrit $O_p(\mathbb{R})$, alors $V U V^T$ décrit $O_p(\mathbb{R})$, donc $\max_{U \in O_p(\mathbb{R})} \operatorname{tr}(A^T U) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$.

d) On a $\|A - U\|^2 = \|A\|^2 + \|U\|^2 - 2\operatorname{tr}(A^T U) = \|A\|^2 + p - 2\operatorname{tr}(A^T U)$, car $U^T U = p$.

Donc $\|A - U\|^2$ est minimal lorsque $\operatorname{tr}(A^T U)$ est maximal.

D'autre part, $\|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^T A) = \operatorname{tr}(A^2) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2$.

On déduit donc de d) que $m(A) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 + p - 2\sum_{j=1}^n |\lambda_j| = \sum_{j=1}^n (|\lambda_j| - 1)^2$.

5) a) On note que $\forall X$, $\|AX\| \leq N(A) \|X\|$ et de même pour B.

Donc $\forall X;\ \|ABX\| \leq N(A)\,\|BX\| \leq N(A)N(B)\,\|X\|$, donc $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Variante : Pour $BX \neq 0$, on a $\dfrac{\|ABX\|}{\|X\|} = \dfrac{\|ABX\|}{\|BX\|}\dfrac{\|BX\|}{\|X\|} \leq N(A)N(B)$.

Pour $BX = 0$ et $X \neq \overrightarrow{0}$, $\dfrac{\|ABX\|}{\|X\|} = 0 \leq N(A)N(B)$. D'où $\sup_{X\neq\overrightarrow{0}} \dfrac{\|ABX\|}{\|X\|} \leq N(A)N(B)$.

Remarque : Il y a une autre preuve possible en utilisant $N(A) = \max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|$.

On a en effet avec $C = AB$: $\forall i$, $\sum_{k=1}^{p} |c_{ik}| \leq \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|\,|b_{jk}|$.

Avec Fubini, on obtient $\sum_{k=1}^{p} |c_{ik}| \leq \sum_{j=1}^{p} (|a_{ij}|\,N(B)) \leq N(B)\sum_{j=1}^{p} |a_{ij}| \leq N(B)N(A)$.

b) On a $\|A^n X\|_\infty \leq N(A^n)\,\|X\|_\infty$, donc par pincement $\lim_{n\to+\infty} \|A^n X\|_\infty = 0$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Il existe X non nul tel que $AX = \lambda X$. On a alors $A^n X = \lambda^n X$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \|A^n X\|_\infty = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} = 0$, donc $|\lambda| < 1$. D'où $\rho(A) < 1$.

c) Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$.

Il existe $P \in GL_p(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et $\forall i \neq j$, $|t_{ij}| \leq \dfrac{\varepsilon}{p}$.

On sait que $N(T) = \max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{p} |t_{ij}|$.

Comme les $t_{ii} \in \mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(A)$ et que $\forall i \neq j$, $|t_{ij}| \leq \dfrac{\varepsilon}{p}$, alors $N(T) \leq \rho(A) + (p-1)\dfrac{\varepsilon}{p} \leq \rho(A) + \varepsilon$.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $N(A) < 1$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K = \rho(A) + \varepsilon < 1$.

Par c), il existe $P \in GL_p(\mathbb{C})$ telle que $N_p(A) \leq K < 1$.

Or, $N_p(A^n) = N(P^{-1}A^nP) = N((P^{-1}AP)^n) \leq N(P^{-1}AP)^n = N_p(A)$.

On en déduit que $N_p(A^n) \leq K^n$, et donc $\lim_{n\to+\infty} N_p(A^n) = 0$.

Comme toutes les normes de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ sont équivalentes, on a donc aussi $\lim_{n\to+\infty} N(A^n) = 0$.

(on peut le justifier directement avec $N(A) = N_p(PAP^{-1}) \leq \beta N_p(A)$, où $\beta = N_p(P)N_p(P^{-1})$).

6) a) On utilise les théorèmes de continuité des intégrales paramétrées :

- Pour tout y, l'application $x \longmapsto K(x,y)f(y)$ est bien continue.

- On pose $M = \sup_{[0;1]^2} |K(x,y)|$. D'où la domination uniforme : $\forall x \in [0,1]$, $|K(x,y)f(y)| \leq \varphi(y) = M\,|f(y)|$.

b) On a $u(f)(x) \leq \int_0^1 |K(x,y)|\,\|f\|_\infty\ dy \leq \|f\|_\infty$. Donc $\|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

On en déduit par récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leq |\lambda|^n\,\|f_0\|_\infty$.

Comme les f_n sont continues, $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ vers une fonction continue.

Posons $g = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. On a par linéarité de u : $\left\|u(g) - \sum_{n=0}^{N} u(f_n)\right\|_\infty = \left\|u\left(g - \sum_{n=0}^{N} f_n\right)\right\|_\infty$.

Puis par majoration, $\left\|u\left(g - \sum_{n=0}^{N} f_n\right)\right\| \leq \left\|g - \sum_{n=0}^{N} f_n\right\|_\infty$.

Comme $\sum_{n=0}^{N} f_n$ converge uniformément vers g, on a $\lim_{n\to+\infty} \left\|g - \sum_{n=0}^{N} f_n\right\|_\infty = 0$.

Donc $u(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(f_n)$. Et $g - \lambda u(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u(f_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n - \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1} = f_0 = f$.

Autre méthode : Une autre solution consiste à revenir à l'expression intégrale, et à utiliser le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions convergeant normalement sur $[0,1]$:

Il s'agit de prouver que pour tout x fixé, $\int_0^1 K(x,y)\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(y)\ dy = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 K(x,y)f_n(y)\ dy$.

Il est conseillé de poser $F_n(y) = K(x,y)f_n(y)$ et on conclut en montrant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|F_n\|_\infty$ converge.