Interrogation n°16. *Barème sur 24 pts. Durée 1h30mn*

Rappel : On dit qu'une partie est convexe ssi $\forall (x,y) \in A^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$.

1) [1.5 pt] Soit A une partie convexe. Montrer que son adhérence $\overline{A}$ est convexe.

2) Soit E un espace vectoriel euclidien. On note $\langle x, y \rangle$ et $\|x\|$ le produit scalaire et la norme euclidienne.

a) [1 pt] Soit x, a et $b \in E$ tels que $\|x-a\| = \|x-b\|$. On pose $c = \frac{1}{2}(a+b)$.

Illustrer par un schéma la relation ici admise : $\|x-c\|^2 + \frac{1}{4}\|b-a\|^2 = \|x-a\|^2 = \|x-b\|^2$.

b) [2.5 pts] Soit A une partie non vide, convexe et compacte (= fermée et bornée).

Soit $x \in E$. Montrer avec soin qu'il existe un unique $a \in A$ tel que $\|x-a\| = d(x, A)$.

c) [1 pt] Montrer que dans $\mathbb{R}^2$ muni de $\| \ \|_\infty$ la propriété du b) est fausse.

Indication : On pourra prendre $x = \overrightarrow{0}$ et une partie A bien choisie de la sphère unité.

d) *Question supplémentaire hors-interrogation*

La propriété du b) est-elle vraie en remplaçant A compact par A fermé ?

3) [2.5 pts] Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ de dim finie ou infinie.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est continue

(ii) u est continue en $\overrightarrow{0}$

(iii) u est bornée au voisinage de $\overrightarrow{0}$: il existe $\alpha > 0$ et $M \geq 0$ tels que $\forall x \in E, \|x\| \leq \alpha \Rightarrow \|u(x)\| \leq M$.

(iv) il existe $k \geq 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq k\|x\|$.

Remarque : Montrer (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

4) Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij}^2}$.

On rappelle que $\| \ \|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$.

a) [1 pt] On note $O_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales. Montrer que $O_p(\mathbb{R})$ est un compact.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On pose $\boxed{m(A) = \sup_{U \in O_p(\mathbb{R})} \operatorname{tr}(A^T U)}$.

b) [1.5 pt] Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des réels. On pose $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_p)$.

Montrer que $m(D) = \sum_{j=1}^p |\lambda_j|$, c'est-à-dire $\sup_{U \in O_p(\mathbb{R})} \operatorname{tr}(DU) = \sum_{j=1}^p |\lambda_j|$.

c) [1.5 pt] Soit $A \in S_p(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

Montrer que $m(A) = \sum_{j=1}^p |\lambda_j|$, où les λ_j sont les valeurs propres de A (répétées avec multiplicité).

d) [1.5 pt] Soit $A \in S_p(\mathbb{R})$ symétrique. Déduire de c) que $\inf_{U \in O_p(\mathbb{R})} \|A - U\|^2 = \sum_{j=1}^p (|\lambda_j| - 1)^2$.

Indication : Noter qu'en particulier $\|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^T A) = \operatorname{tr}(A^2)$.

5) On munit $\mathbb{C}^p$ de la norme $\|X\|_\infty = \sup_{1\leq j\leq p} |x_j|$, pour $X = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{C}^p$.

On considère la norme N subordonnée à $\| \ \|_\infty$, c'est-à-dire $N(A) = \sup_{X\neq 0} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|} = \max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|$.

On pose $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ le module maximal des valeurs propres de A.

a) [1.5 pt] Montrer que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

b) [2 pts] On suppose $\lim_{n\to+\infty} N(A^n) = 0$.

Montrer que pour tout vecteur $X \in \mathbb{C}^p$, on a $\lim_{n\to+\infty} \|A^n X\|_\infty = 0$. En déduire que $\rho(A) < 1$.

Pour la suite :

- On suppose connu le résultat suivant de "diagonalisation à ε près" :

Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, il existe $P \in GL_p(\mathbb{C})$ telle que la matrice $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et ses coefficients non diagonaux sont en module $\leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\forall i \neq j$, $|t_{ij}| \leq \varepsilon$.

- Pour $P \in GL_p(\mathbb{C})$, on pose $N_p(A) = N(P^{-1}AP)$.

On vérifie aisément (*admis ici*) que N_p est une norme.

c) [1.5 pt] Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{C})$ telle que $N_p(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$.

d) [1.5 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < 1$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} N(A^n) = 0$.

6) On munit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$.

Soit $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ $\ (x,y) \longmapsto K(x,y)$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad \int_0^1 |K(x,y)| \ dy \leq 1$$

On note $u : E \to E$ l'endomorphisme défini par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad u(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) \ dy$$

a) [1.5 pt] Montrer brièvement que u est bien définie, c'est-à-dire que $u(f) \in E$ pour tout $f \in E$.

b) [2 pts] Soient une fonction $f \in E$ et un réel λ vérifiant $|\lambda| < 1$.

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = f$ et $f_{n+1} = \lambda u(f_n)$.

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge vers une fonction continue $g \in E$ et que g vérifie

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) - \lambda \int_0^1 K(x,y) g(y) \ dy = f(x)$$