Interrogation n°15. Corrigé

1) Supposons (i). Considérons $0 < \rho < R$.

La série $\sum a_n \rho^n$ converge, donc $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc est bornée par un réel M.

(On rappelle qu'une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée).

On a donc $|a_n\rho^n| \leq M$, d'où $|a_n| \leq M\lambda^n$, avec $\lambda = \dfrac{1}{\rho}$.

Supposons (ii). Alors $a_n = O(\lambda^n)$, et comme la série $\sum \lambda^n z^n$ est de rayon $\dfrac{1}{|\lambda|}$, alors $R \geq \dfrac{1}{|\lambda|}$.

2) a) On a $\dfrac{1}{2-x^2} = \dfrac{1}{2(1-\frac{1}{2}x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^{n+1}}$. Et $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$.

b) $f(x) = \mathrm{Re}(e^{(1+i)x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(1+i)^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n/2}\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\dfrac{x^n}{n!}$.

3) a) - N est bien définie car $t \longmapsto |a(t)x + b(t)y|$ est continue donc bornée sur $[-1,1]$.

- $N(X) \geq 0$. Supposons $N(X) = 0$. Alors $\forall t \in [-1,1]$, $|a(t)x + b(t)y| = 0$, c'est-à-dire $xa + by = 0$.

Comme (a,b) est libre dans $C^0([-1,1],\mathbb{R})$, alors $(x,y) = (0,0)$.

- On a bien $N(\lambda X) = |\lambda|\, N(X)$, car $\sup(\lambda A) = |\lambda| \sup A$ pour toute partie $A \subset \mathbb{R}^+$.

- Soient $X = (x,y)$ et $X' = (x',y')$.

On a $|a(t)(x+x') + b(t)(y+y')| \leq |a(t)x + b(t)y| + |a(t)x' + b(t)y'| \leq N(X) + N(X')$.

On en déduit que $N(X+X') \leq N(X) + N(X')$.

b) En considérant le produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ dans $\mathbb{R}^2$, on a

$N(X) = \sup_{t\in[-1,1]} |\langle X, Z_t\rangle|$, où $Z_t = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Le vecteur Z_t décrit le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

On a $|\langle X, Z_t\rangle| \leq \|X\|_2 \|Z_t\|_2 = \|X\|_2$, avec égalité lorsque X et Z_t sont colinéaires de même sens.

Donc $N(X) = \|X\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

c) *Remarque* : On a $N(x,1) = \max(|x+m|, |x+M|)$, car $\theta \longmapsto |x+\theta|$ convexe atteint son max sur un bord.

Pour y non nul, on a donc $N(x,y) = |y|\, N\left(\dfrac{x}{y}, 1\right) = \max(|x+my|, |x+My|)$. Vrai aussi pour $y = 0$.

4) a) On a $0 \leq D_n \leq n!$, donc $\dfrac{D_n}{n!} = O(1)$ et $R \geq 1$.

b) Une permutation σ est définie par l'ensemble A de ses points fixes et un dérangement de $[\![1,n]\!] \setminus A$.

Donc $n! = \sum_{A\subset[\![1,n]\!]} D_{n-\mathrm{card}\,A} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}D_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$.

c) $\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{D_k}{k!}\dfrac{1}{(n-k)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est le produit de Cauchy des suites $\left(\dfrac{D_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les séries entières associées ont pour rayons respectifs R et $+\infty$. On a donc $R = \min(R,+\infty)$.

Donc $\forall x \in]-R,R[$, $f(x)\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ Donc $R = 1$ et $f(x) = \dfrac{\exp(-x)}{1-x}$.

d) En utilisant à nouveau un produit de Cauchy, on obtient

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{k!}, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\frac{D_n}{n!} = e^{-1} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty$$

5) a) On a $\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{(n+1)} \to 4$, donc $R = \dfrac{1}{4}$ (par le critère de D'Alembert).

b) On a $(n+1)\binom{2n+2}{n+1} = 2(2n+1)\binom{2n}{n}$.

Donc $\forall x \in]-R,R[$, $f'(x) = 4xf'(x) + 2f(x)$, donc $f'(x) = \dfrac{2}{1-4x}f(x)$, donc $f(x) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-4x}}$, et $\lambda = f(0) = 1$.

6) a) On a $\forall y \in]-1,1[$, $\sqrt{1-y} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$, où $a_n = -\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}\ldots\dfrac{(2n-3)}{2}$.

On en déduit que $R = \dfrac{1}{4}$ et $\forall x \in]-R,R[$, $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} 4^{n+1} x^n$.

Donc $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = a_{n+1} 2^{2n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}\ldots\dfrac{(2n-1)}{2}\ 4^n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Variante : On intègre le DSE du 5), car une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ est $\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4x}\right)$.

b) Par produit de Cauchy, $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

Donc, par unicité du DSE, on obtient : $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

7) On a $\int_0^{+\infty} f(t)\ e^{itx}\ dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(itx)^n}{n!}\ f(t)\ dt$.

Posons $u_n(t) = \dfrac{(itx)^n}{n!}\ f(t)$. On a $\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\ dt \leq M\int_0^{+\infty}\dfrac{|tx|^n}{n!}\ e^{-t}\ dt = M\,|x|^n$, car $\int_0^{+\infty}\dfrac{t^n e^{-t}}{n!}\ dt = 1$.

Donc pour $|x| < 1$, la série $\sum M\,|x|^n$ converge, donc la série $\int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(t)|\ dt$ converge.

Par le théorème ITT, on en déduit que $\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(itx)^n}{n!}\ f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{(itx)^n}{n!}\ f(t)\ dt$.

Ainsi, pour $|x| < 1$, $\int_0^{+\infty} f(t)\ e^{itx}\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $a_n = \int_0^{+\infty}\dfrac{(it)^n}{n!}\ f(t)\ dt$.

Variante : On utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange à $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{itx}\ dt$.

On a par le th de dérivation des intégrales paramétrées $F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\ (it)^n\ e^{itx}\ dt$.

On a donc d'une part $F^{(n)}(0) = a_n$ et d'autre part $\sup_{[0,x]}\left|F^{(n)}\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\ t^n\ dt \leq M\int_0^{+\infty} e^{-t}\ t^n\ dt = M\ n!$

Ainsi, pour $|x| < 1$, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{|x|^n}{n!}\sup_{[0,x]}\left|F^{(n)}\right| = 0$. On en déduit $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

8) On a $|a_n| \leq u_n$, où $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ suite de type Fibonacci.

L'équation caractéristique $z^2 = z + 2$ admet 1 et 2 comme racines. Donc $u_n = O(2^n)$ et $R \geq \dfrac{1}{2} > 0$.

De façon plus générale, on a $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$: pour λ et μ tels que $\lambda < 1 < \mu$, on a donc $\lambda \leq \dfrac{n+1}{n} \leq \mu$ pour $n \geq n_0$ assez grand, et on encadre $(a_n)_{n\geq n_0}$ par deux suites de Fibonacci $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ d'équations caractéristiques respectives $z^2 = z + \lambda$ et $z^2 = z + \mu$ avecv les mêmes conditions initiales aux rangs n_0 et n_0+1, c'est-à-dire $(v_{n_0}, v_{n_0+1}) = (w_{n_0}, w_{n_0+1}) = (a_{n_0}, a_{n_0+1})$.

On a $v_n \sim \alpha r(\lambda)^n$ où $\alpha > 0$ et $r(\lambda) = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4\lambda})$ et de même pour w_n.

Comme $\forall n \geq n_0$, $v_n \leq a_n \leq w_n$, alors on obtient $\dfrac{1}{r(\mu)} \leq R \leq \dfrac{1}{r(\lambda)}$.

En faisant tendre λ vers 1^- et μ vers 1^+, on obtient donc $R = \dfrac{1}{r(1)} = \dfrac{1}{\varphi}$, où $\varphi = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Variante : On pose $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. On a $r_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_{n+1} = 1 + \frac{n+1}{n}\frac{1}{r_n}$.

Et on montre par des études de fonctions que $L = \lim_{n\to+\infty} r_n$ existe, d'où $L = 1 + \frac{1}{L}$, et donc $L = \varphi$.