Interrogation n°15. *Barème sur 24 pts. Durée 1h15*

1) [1.5 pt] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

Montrer que $R > 0$ ssi il existe des réels $\lambda > 0$ et $M \geq 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M\lambda^n$.

2) a) [1 pt] Expliciter sans justification les DSE de $\dfrac{1}{2-x^2}$ et de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

b) [1 pt] Expliciter (sans somme) les coefficients c_n du DSE de $f(x) = \cos(x)e^x$.

Indication : Utiliser les exponentielles complexes.

3) Soient a et b des fonctions continues sur $[0,1]$. On suppose que (a,b) est libre dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

Pour $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(X) = \sup_{t\in[0,1]} |a(t)x + b(t)y|$, qu'on note aussi $N(x,y)$..

a) [2.5 pts] Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) [1 pt] On prend ici $a(t) = \cos(2\pi t)$ et $b(t) = \sin(2\pi t)$. Donner une expression simple de $N(X)$.

Indication : On pourra faire intervenir le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^2$.

c) [1 pt] On prend $a(t) = 1$, c'est-à-dire $N(X) = \sup_{t\in[0,1]} |x + b(t)y|$.

On vérifie (*admis ici*) que $N(x,1) = \sup_{t\in[0,1]} |x + b(t)| = \max(|x+m|, |x+M|)$, où $m = \inf b$ et $M = \sup b$.

En déduire une expression simple de $N(x,y)$.

4) On note D_n le nombre de dérangements (= permutations sans point fixe) de $[\![1,n]\!]$.

a) [1 pt] Justifier que la série entière $\sum \dfrac{D_n}{n!} x^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$.

b) [1.5 pt] Justifier brièvement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

c) [1.5 pt] On vérifie aisément (*admis ici*) que la formule de b) s'écrit : $1 = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{D_k}{k!} \dfrac{1}{(n-k)!}$.

On pose $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{D_n}{n!} x^n$. Montrer que $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{\exp(-x)}{1-x}$.

d) [1 pt] En déduire que $D_n \sim \dfrac{n!}{e}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) a) [1 pt] Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \binom{2n}{n} x^n$.

b) [2.5 pts] Pour $x \in]-R,R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f. En déduire $f(x)$.

Indication : Utiliser $(n+1)\binom{2n+2}{n+1} = (4n+2)\binom{2n}{n}$.

6) *Nombres de Catalan*

a) [3 pts] Déterminer le coefficient c_n du DSE de $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ en $x = 0$.

Préciser sans justification le rayon de convergence R de $\sum c_n x^n$.

b) [1 pt] On vérifie aisément que $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = 1 + xf(x)^2$.

En déduire que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence forte qu'on explicitera.

7) [2 pts] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $\exists\, M \geq 0,\ \forall t \in [0, +\infty[,\ |f(t)| \leq Me^{-t}$.

Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ \ x \longmapsto \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{itx}\ dt$ est DSE sur $]-1, 1[$.

8) [2 pts] ($\bigstar$) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{n+1}{n} a_{n-1}$.

Montrer que le rayon R de convergence de $\sum a_n z^n$ vérifie $R > 0$. Donner la valeur de R.