Interrogation n°14. Corrigé

1) Soit $x \in]-R, R[$. La série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ converge normalement sur le segment $[0, x]$.

Donc $\int_0^x f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Variante : On dérive terme à terme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ (cv normale de la série des dérivées sur $[0, x]$).

2) a) $\dfrac{R}{2}$; b) R ; c) $\sqrt{R}$; d) R ; e) $\max(1, R)$.

Remarque : Pour e), la preuve est la suivante : Posons $b_n = \min(|a_n|, 1)$. Notons R' le rayon de $\sum b_n z^n$.

- Supposons $R > 1$. Alors $\sum |a_n|$ converge, donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, donc $b_n = |a_n|$ pour n assez grand. Donc $R' = R$.

- Supposons $R \leq 1$. On a $0 \leq b_n \leq 1$, donc $\sum b_n z^n$ converge pour tout $|z| < 1$, donc $R' \geq 1$. Supposons par l'absurde que $\sum b_n z^n$ converge pour un $|z| > 1$. Alors nécessairement $b_n \neq 1$ pour n assez grand, donc $b_n = |a_n|$ pour n assez grand, ce qui contredit $R \leq 1$. Donc $R' = 1$.

3) a) Supposons g nulle. Comme $R > 0$, alors $b_n = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!} = 0$. Réciproque immédiate.

b) Pour $x \in]-R, R[$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ donc $f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$.

Donc f est paire, c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$, ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n a_n$, c'est-à-dire ssi a_n est nul pour tout n impair.

4) a) Supposons $l < 1$. Pour $l < k < 1$, on a $|u_n|^{1/n} \leq k$ pour n assez grand.

Donc $|u_n| \leq k^n$ pour n assez grand, d'où la convergence de $\sum |u_n|$.

Supposons $l < 1$. Pour $l < k < 1$, on a $|u_n| \geq k^n$ pour n assez grand. Donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.

b) Si $\rho < \dfrac{1}{L}$, alors $\lim_{n\to+\infty} (|a_n| \rho^n)^{1/n} = L\rho < 1$, donc $\sum |a_n| \rho^n$ converge, donc $R \geq \dfrac{1}{L}$.

Si $\rho > \dfrac{1}{L}$, alors $(|a_n| \rho^n)^{1/n} = L\rho > 1$, donc $(|a_n| \rho^n)^{1/n}$ tend vers $+\infty$, donc $R \leq \dfrac{1}{L}$. Donc $R = \dfrac{1}{L}$.

5) On a $R = \min(\sqrt{R_0}, \sqrt{R_1})$.

En effet, $(\rho^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi $\left((\rho^2)^n a_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((\rho^2)^n a_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Or, $\left((\rho^2)^n a_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si $\rho^2 < R_0$ et ne l'est pas si $\rho^2 > R_0$. Et de même avec R_1 pour $\left((\rho^2)^n a_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

6) a) La convergence résulte de $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n} = \dfrac{x}{n(x+n)} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b) Posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n}$. On a $f_n'(x) = \dfrac{1}{(x+n)^2}$. Donc $\sup_{\mathbb{R}} |f_n'| = \dfrac{1}{n^2}$.

Donc la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et ainsi S est de classe C^1.

On a aussi $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) 0$, donc f est croissante.

c) On revient aux *sommes partielles* (qui se télescopent) :

Avec $S_p(x) = \sum_{n=1}^{p} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n}\right)$, on a $S_p(x+1) - S_p(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+p+1}$.

En faisant tendre $p \to +\infty$, on obtient $S(x+1) - S(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, donc $S(n) \sim \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme S est croissante, alors $\ln(n) \leq S(x) \leq \ln(n+1)$, où $n = \lfloor x \rfloor$.

On a $\ln(n) \sim \ln(n+1) \sim \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc par pincement, $S(x) \sim_{+\infty} \ln x$.

Remarque : Une variante consiste à évaluer $S(x) = S(r) + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{r+k}$, où $r = x - n$, par des intégrales, en utilisant le fait que S est bornée sur $[0, 1]$, donc $S(r) = O(1)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

En considérant le produit de Cauchy de $(1-t^2)^{-1/2}$ par lui même, on obtient par unicité du DSE

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2 \text{ et } j+k=m} \frac{1}{4^j}\binom{2j}{j}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = 1, \text{ c'est-à-dire } \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2 \text{ et } j+k=m} \binom{2j}{j}\binom{2k}{k} = 4^m$$

b) On considère le produit des polynômes $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$.

Le coefficient de degré n est $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2 \text{ et } j+k=n} \binom{n}{j}\binom{n}{k} = \binom{2n}{n}$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

7) a) La série de fonctions positives $\sum \ln\left(1+\dfrac{x}{2^n}\right)$ converge normalement sur tout segment $[0,a]$.

En effet, $\sup_{x\in[0,a]} \ln\left(1+\dfrac{x}{2^n}\right) = \ln\left(1+\dfrac{a}{2^n}\right) = O\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Donc $f(x) = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{x}{2^n}\right)\right)$ est continue comme composée de fonctions continues.

b) On vérifie aisément que $f(x) = (1+x)f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Réciproquement, soit g continue vérifiant la propriété.

Alors $g(x) = \prod_{n=0}^{N-1}\left(1+\dfrac{x}{2^n}\right) g\left(\dfrac{x}{2^N}\right)$ pour tout N. Avec $N \to +\infty$, on obtient $g(x) = f(x)$.

d) On cherche une solution g de (E) sous la forme $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon $R = +\infty$.

Deux séries entières coincidant sur $\mathbb{R}^+$ ont les mêmes dérivées en 0, donc les mêmes coefficients.

Donc g vérifie (E) ssi $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{1}{2^n}a_n + \dfrac{1}{2^{n-1}}a_{n-1}$, c'est-à-dire $a_n = \dfrac{2}{2^n-1}a_{n-1}$.

On a alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 0$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit bien une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R = +\infty$.

8) a) On a $X^2 e^{\lambda X} \leq m^2 e^{\lambda X}$, donc $E(X^2 e^{\lambda X}) \leq E(e^{\lambda X})$, et comme $E(e^{\lambda X}) > 0$, alors $M(\lambda) \leq m^2$.

b) Par le théorème du transfert, $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{\lambda x_n}$, où $\alpha_n = P(X = x_n)$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. La dérivée p-ième de $f_n : \lambda \longmapsto \alpha_n e^{\lambda x_n}$ vaut $f_n^{(p)}(\lambda) = \alpha_n (x_n)^p e^{\lambda x_n}$.

Les séries de fonctions $\lambda \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x_n)^p e^{\lambda x_n}$ convergent normalement sur tout segment $[-\rho,\rho]$, car

$$\left|\sup_{\lambda\in\mathbb{N}} f_n^{(p)}(\lambda)\right| \leq m^p e^{\rho m}\ \alpha_n \text{ et que } \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$$

Donc L est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $L^{(p)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x_n)^p e^{\lambda x_n} = E(X^p\ e^{\lambda X})$.

c) On a $\varphi(0) = \ln(1) = 0$, $\varphi'(0) = E(X) = 0$ et par a), $\varphi''(\lambda) = M(\lambda) - N(\lambda)^2 \leq M(\lambda) \leq m^2$.

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|\varphi(\lambda)| \leq \dfrac{1}{2}m^2\lambda^2$, donc $L(\lambda) \leq \exp\left(\dfrac{1}{2}m^2\lambda^2\right)$.

9) Pour $z \in \Delta$, $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z) \leq \exp(|z|) < \exp(\ln 2) = 2$, donc $\exp(z) \neq 2$.

On peut donc considérer $\forall z \in \Delta$, $f(z) = \dfrac{1}{2-\exp(z)}$.

On a alors $f(z) = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{1-\exp(z)/2} = \dfrac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{2^n}\exp(z)^n = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}\exp(nz)$.

D'où $f(z) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{n^m z^m}{2^n m!}$. Posons $u_{n,m} = \dfrac{n^m z^m}{2^n m!}$.

Pour $z \in \Delta$, $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable, car $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\left|\dfrac{n^m}{2^n m!}z^m\right| = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n}\exp(n\,|z|) = \dfrac{1}{1-\exp(|z|)/2}$.

Par Fubini, on a donc $f(z) = \dfrac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^m z^m}{2^n m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$, où $a_m = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^m}{2^{n+1}m!}$.