Interrogation n°14. *Barème sur 23.5 pts. Durée 1h15*

1) [1 pt] Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En utilisant *les théorèmes sur les séries de fonctions*, justifier : $\forall x \in]-R, R[$, $\int_0^x f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

2) [2.5 pts] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Donner *sans justification* le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

a) $\sum a_n 2^n z^n$; b) $\sum |a_n| z^n$; c) $\sum a_n z^{2n}$; d) $\sum a_n n^2 z^n$; e) $\sum \min(1, |a_n|) z^n$.

3) a) [1 pt] Soit $g :]-R, R[\to \mathbb{R}$ définie par une série entière $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Rappeler sans le justifier l'argument permettant de justifier : g est nulle sur $]-R, R[$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$.

b) [1 pt] Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ est paire ssi $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

4) a) [1 pt] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = l$.

Montrer que si $l < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument et que si $l > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.

Indication : Considérer k compris entre 1 et l.

b) [1.5 pt] On suppose $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = L \geq 0$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

5) [2.5 pts] On note R_0 et R_1 les rayons de convergence respectifs de $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$.

Exprimer à l'aide de R_0 et R_1 le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$. Justifier votre réponse.

6) a) [1 pt] Justifier l'existence pour $x \geq 0$, de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n} \right)$.

b) [1.5 pt] Montrer que S est de classe C^1 et croissante sur $[0, +\infty[$.

c) [1 pt] Montrer que $\forall x \geq 0$, $S(x+1) - S(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

d) *Question hors-interrogation.* Montrer que $S(x) \sim \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7) *Les deux questions sont indépendantes*

a) [1 pt] On sait que $\forall t \in [0, 1[$, $(1-t)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{4^n} \binom{2n}{n} t^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier brièvement que $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2 \text{ et } j+k=n} \binom{2j}{j}\binom{2k}{k} = 4^n$.

b) [1 pt] Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier brièvement que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

8) a) [1.5 pt] On pose $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{2^n}\right)$. Justifier que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b) *Question hors-interrogation* (mais admise pour la question c)).

Justifier que f est l'unique fonction continue sur $[0,+\infty[$ vérifiant la propriété

$$(E) : f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, \quad f(x) = (1+x) f\left(\frac{x}{2}\right)$$

c) [2 pts] En utilisant b), montrer que f est DSE sur $[0,+\infty[$,

c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \geq 0,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

9) Soient $m \in \mathbb{R}^+$ et $X : \mathbb{R} \to [-m,m]$ une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[-m,m]$.

On prend $\operatorname{Im} X \subset \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset [-m,m]$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(X = x_n)$. On considère

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ L(\lambda) = E(\exp(\lambda X)) \quad , \quad M(\lambda) = \frac{E(X^2 e^{\lambda X})}{E(e^{\lambda X})} \quad \text{et} \quad N(\lambda) = \frac{E(X e^{\lambda X})}{E(e^{\lambda X})}$$

a) [0.5 pt] Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $M(\lambda) \leq m^2$.

b) [1 pt] Montrer que L est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ L^{(p)}(\lambda) = E(X^p e^{\lambda X})$$

c) [0.5 pt] On pose $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda) = \ln(L(\lambda))$. On vérifie aisément (admis ici) que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(\lambda) = N(\lambda) \ \text{ et } \ \varphi''(\lambda) = M(\lambda) - N(\lambda)^2$$

On suppose qu'on a de plus $\boxed{E(X) = 0}$. Ainsi, on a en particulier $\varphi'(0) = 0$.

En donnant seulement l'argument essentiel, justifier que $L(\lambda) \leq \exp\left(\frac{1}{2} m^2 \lambda^2\right)$.

10) *Rappel : Théorème de Fubini :pour les familles sommables.* Soit une famille $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,m}|$ converge pour tout $m \in \mathbb{N}$, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{n,m}|\right)$ converge.

Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{n,m}|\right) < +\infty$, c'est-à-dire la famille $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable.

Alors $\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}$ converge absolument pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ converge absolument, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

[2 pts] On note D l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \ln 2$.

Montrer qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\forall z \in D$, $\dfrac{1}{2 - \exp(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

8) Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, où $f_n(x) = \left(\prod_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x+k}\right)$. Ainsi, $f_0(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_1(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$, etc.

a) [1.5 pt] Justifier que $S(x)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Préciser la monotonie de S sur $]0, +\infty[$.

b) [1 pt] Montrer que pour $x > 0$, on a $xS(x) - S(x+1) = 1$.

c) [1 pt] (★) Déduire de a) et b) un équivalent de S en 0 et en $+\infty$.