Interrogation n°13. *Barème sur 24.5 pts. Durée 1h15mn*

1) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\phi_X(\theta) = E(e^{i\theta X})}$.

a) [2.5 pts] Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_X(\theta)\ e^{-ik\theta}\ d\theta$.

b) [1.5 pt] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \phi_{X_n}(\theta) = \phi_X(\theta)$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

c) [1.5 pt] Soit $\lambda \geq 0$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Déduire des questions précédentes que la loi de X_n converge vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque : On admet que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n = \exp(z)$.

2) a) [1.5 pt] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, où $0 < p \leq 1$.

On pose $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = 1\}$.

Montrer que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ P(N > n + m \mid N > n) = P(N > m)$.

b) [1 pt] Soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \qquad P(Z > n + m \mid Z > n) = P(Z > m)$$

Montrer que Z suit une loi géométrique, c'est-à-dire qu'il existe $q \in [0, 1]$ tel que $P(Z > n) = q^n$.

3) Soient $m \geq 0$ et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[-m, m]$ et telle que $\boxed{E(X) = 0}$.

On pose $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\boxed{L(\lambda) = E(e^{\lambda X})}$. On *admet* que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $|L(\lambda)| \leq \exp\left(\dfrac{1}{2} m^2 \lambda^2\right)$.

On considère une suite de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ mutuellement indépendantes *et* de même loi que X.

On pose $\boxed{S_n = X_1 + ... + X_n}$.

a) [0.5 pt] Justifier que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ E(e^{\lambda S_n}) = L(\lambda)^n$.

b) [1.5 pt] Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall \lambda > 0,\ P(S_n \geq \varepsilon) \leq \dfrac{L(\lambda)^n}{\exp(\lambda\varepsilon)}$.

c) [1.5 pt] Montrer que $P\left(\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \theta\right) \leq \exp\left(-\dfrac{\theta^2}{2m^2}\right)$.

4) Soient X et Y des v.a. entières non nulles et indépendantes qui suivent des lois de Poisson.

On pose $\lambda = E(X)$ et $\mu = E(Y)$.

a) [1.5 pt] Calculer $P(X = k \mid X + Y = n)$.

b) [1 pt] En déduire que la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = n$ est une loi binomiale.

5) Les joueurs J et K possèdent N billes à eux deux. Au départ, le joueur J possède $m \in \{0, \ldots, N\}$ billes et le joueur K possède les $(N - m)$ billes restantes. À chaque partie, le perdant donne une bille à l'autre. Le joueur J gagne chaque partie avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs possède les N billes.

On note X_k le nombre de billes que J possède juste après la k-ième partie.

Remarque : Lorsque le jeu s'arrête à la k-ième partie, on pose $X_j = X_k$ pour tout $j \geq k$.

a) [1 pt] Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère le vecteur $Z_k = (P(X_k = n))_{0 \leq n \leq N}$. Ainsi, $Z_k \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Expliciter sans justification une matrice $M \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ telle que $Z_{k+1} = MZ_k$. On posera $q = 1 - p$.

b) [1.5 pt] On admet que $\lim_{k \to +\infty} M^k$ existe et est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$.

Justifier que presque sûrement, le jeu s'arrête (après un nombre fini d'étapes).

Les questions c) de d) sont indépendantes de b).

c) [1.5 pt] On note A l'événement : " Le joueur J l'emporte ".

On pose $\forall n \in \{0, \ldots, N\}$, $a_n = P(A \mid X_0 = n)$.

La suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. En particulier, on a :

$$\forall (n, m) \in \{0, \ldots, N\}^2, \;\; P(A \mid X_1 = n, X_0 = m) = P(A \mid X_1 = n) = a_n$$

Montrer que $\forall n \in \{1, 2, ..., N - 1\}, a_n = qa_{n-1} + pa_{n+1}$.

d) [1 pt] On suppose $p < \dfrac{1}{2}$. Les racines de l'équation $z = q + pz^2$ sont 1 et $\tau = \dfrac{q}{p}$. Déterminer a_n.

6) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de rapport K.

Pour $h > 0$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g_h(x) = \dfrac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \, dt}$.

a) [0.5 pt] Montrer que g_h est une fonction de classe C^1.

b) [1.5 pt] Montrer que la suite $\left(g_{1/n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

7) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé.

a) [1 pt] Soient A et B deux événéments. Montrer que $|P(A) - P(B)| \leq P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$.

Indication : Utiliser $1_A - 1_B$.

b) [1 pt] Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose comme dans le cours : $G_X(t) = E(t^X)$ pour tout $t \in [-1, 1]$.

Montrer que $\sup_{t \in [-1,1]} |G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2P(X \neq Y)$.

c) [1.5 pt] (★) Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires entières $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum E(Z_n)$ converge.

On pose $X_n = \sum_{k=0}^{n} Z_k$ et $X = \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n = \lim_{n \to +\infty} X_n$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

On admet que X est une variable aléatoire.

Montrer $P(X < +\infty) = 1$ et que $(G_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers G_X sur $[-1, 1]$.