Interrogation n°12. Corrigé.

1) a) Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ composée de vecteurs propres de u.

On a donc $u(e_j) = \lambda_j e_j$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, donc $\mathrm{tr}\, u = \sum_{j=1}^n \lambda_j$.

Pour $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, on a $\langle x, u(x)\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2$. On conclut en prenant par exemple $x = \sum_{j=1}^n e_j$.

b) On note $u : X \longmapsto AX$ l'endomorphisme dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du psc. Ainsi, u est symétrique et $\mathrm{tr}\, u = 0$.

Par a), il existe x non nul tel que $\langle x, u(x)\rangle = 0$. On pose $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$, qu'on complète en une base orthonomrée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de E (en prenant une base orthonormée de $(e_1)^\perp$).

On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = A' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & B \end{array}\right)$, car $a'_{11} = \langle e_1, u(e_1)\rangle = 0$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors A' est symétrique, donc B est symétrique.

c) On note Δ_n le sev des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de diagonale nulle.

On procède par récurrence sur n. Avec les notations de b), on a $\mathrm{tr}\, B = \mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}\, A = 0$.

Par hypothèse de récurrence, il existe $V \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $V^T B V \in \Delta_{n-1}$.

On prend $U = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & V \end{array}\right) \in O_n(\mathbb{R})$. On a alors $U^T A' U = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & V^T B V \end{array}\right) \in \Delta_n$.

2) YZ est d'espérance finie par comparaison : $|YZ| \leq \frac{1}{2} E(Y^2 + Z^2)$.

Les variables X et YZ sont d'espérances finies et sont indépendantes.

Donc (par Fubini) XYZ est d'espérance finie et on a $E(XYZ) = E(X)E(YZ)$.

On a donc aussi $|E(XYZ)| = |E(X)|\,|E(YZ)| \leq E(|X|)E(|YZ|) \leq \frac{1}{2} E(|X|)E(Y^2 + Z^2)$.

3) a) La série $\sum |a_n z^n|$ converge, donc la série $\sum z^n P(X = n)$ converge absolument.

Par le th du transfert, z^X est d'espérance finie et on a $E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n P(X = n)$.

(*Remarque* : Pour justifier que z^X est d'espérance finie, on peut aussi utiliser le fait que $\left|z^X\right| \leq 1$).

b) z^X et z^Y sont indépendantes, donc $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z) = G_X(z)^2$.

On a $z^{(2X)} = (z^2)^X$, donc $G_{2X}(z) = G_X(z^2)$.

Variante : La v.a. $2X$ est à valeurs dans $2\mathbb{N}$. On a $G_{2X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} P(2X = 2n) = G_X(z^2)$.

4) a) On a $Z_n = f(X_n)$, où $f(x) = \frac{1}{2}(1 + x)$, donc les Z_n sont indépendantes.

b) On a $S_n = n - 2T_n$. Or, T_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$.

Donc $P(S_n = n - 2k) = P(T_n = k) = \binom{n}{k} q^k p^{n-k}$.

On a $\mu_n = E(S_n) = nE(X) = n(p - q) > 0$ et $V(S_n) = V(2T_n) = 4V(T_n) = 4npq$.

c) $P(S_n \leq 0) \leq P(|S_n - \mu_n| \leq \mu_n) \leq \dfrac{V(S_n)}{\mu_n^2} = \dfrac{4pq}{n(p-q)^2} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

5) a) **-** $P(X > 0) = P(X \geq 1) \leq \dfrac{E(X)}{1}$ par Markov (valide car X positive).

Autre preuve : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) \geq P(X > 0)$.

- On a $X = X.1_{X>0}$ donc par Cauchy-Schwarz, $E(X)^2 \leq E(X^2)E(1_{X>0}) = E(X^2)P(X > 0)$.

b) On a $\alpha = \dfrac{G'(1)^2}{G''(1) + G'(1)} = \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda}$ et $\beta = 1 - G(0) = 1 - e^{-\lambda}$ et $\gamma = G'(1) = \lambda$.

6) a) On a $\mu = E(Y_i) = P(A_i) = P(X_i = 0, X_{i-1} = 0) + P(X_i = 1, X_{i-1} = 1) = p^2 + q^2 = 1 - 2pq = 1 - 2r$.
Et $\omega = V(Y_i) = \mu - \mu^2 = \mu(1 - \mu) = 2r(1 - 2r)$.

b) On a $\delta = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2)$.
On a $E(Y_1Y_2) = P(X_0 = X_1 = X_2) = p^3 + q^3 = 1 - 3pq(p + q) = 1 - 3r$.
Donc $\delta = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 1 - 3r - (1 - 2r)^2 = r - 4r^2 = r(1 - 4r)$.

Remarque : Il est logique que $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$ dans les trois cas $p \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Pour $i \geq 3$, $Y_1 = (f(X_0, X_1)$ et $Y_i = f(X_{i-1}, X_i)$ sont indépendantes, donc $\mathrm{Cov}(Y_{i-1}, Y_i) = 0$.

c) On a $M_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, donc par linéarité $E(M) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = n\mu$.

On a $V(M_n) = \sum_{i=1}^n V(Y_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \sum_{i=1}^n V(Y_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) + 0$.

On a $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)$, donc on obtient $V(M_n) = n\omega + 2(n - 1)\delta$.

d) On en déduit en particulier $V(M_n) = O(n)$, donc $\left(\dfrac{M_n}{n}\right)$ converge en probabilités vers μ :
En effet, par Bienaymé-Tchebychev, $P\left(\left|\dfrac{M_n}{n} - \mu\right| \leq \varepsilon\right) \leq \dfrac{V(M_n)}{n^2\varepsilon^2} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

7) a) $P(Y_n = 1) = p^n$.

b) Comme Z est une variable de Bernoulli, $E(Z) = P(Z = 1)$.
$P(Z = 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = 1 \mid N = n)P(N = n)$.
Or, $P(Z = 1 \mid N = n) = P(Y_n = 1 \mid N = n) = P(Y_n = 1)$ car N est indépendante de $Y_n = (X_1, ..., X_n)$.
Donc $P(Z = 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{p^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{p}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1 - p/2} = \dfrac{1}{2 - p} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
Remarque : Il s'agit du même principe que celui utilisé dans la formule de Wald.

8) a) Le graphe de f est au-dessus de sa tangente en z, donc $f(x + z) \geq f(z) + xf'(z)$.

b) On a X et $f'(Z)$ indépendantes, donc $E(Xf'(Z)) = E(X)E(f'(Z)) = 0$.
Par la propriété de l'ordre et par linéarité, on a donc $E(f(X + Z)) \geq E(f(Z))$.

9) a) Comme X et Y sont indépendantes, la loi de Z ne dépend que des lois de X et Y :
en effet, on a $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ P(Z = n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X = k)P(Y = n - k)$.

Or, X et $-X$ ont même loi, et de même Y et $-Y$ ont même loi.
De plus, $-X$ et $-Y$ sont indépendantes. Donc $Z = (X + Y)$ et $-Z = (-X) + (-Y)$ ont même loi.

Variante : On pose $\forall(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $a_{n,m} = P(X = n, Y = m)$.
On a $P(Z = n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k,n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k,-n+k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{-k,-n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k,-n-k} = P(Z = n)$.

Remarque : La propriété est généralement fausse si X et Y ne sont pas indépendantes.

b) On a $P(X > Y) = \sum_{n\geq m} a_{n,m}$. Comme $a_{n,m} = a_{m,n}$, alors $P(X > Y) = P(X < Y)$.

Or, $\Omega = (X > Y) \bigsqcup (X < Y) \bigsqcup (X = Y)$, donc $2p = 1 - P(X = Y)$.

Or, $-Y$ est aussi une v.a. indépendante de X et de loi symétrique.
Donc $P(X = Y) = P(X = -Y) = P(Z = 0)$. Donc $r = \frac{1}{2}(1 - P(Z = 0))$.

Remarque : En fait, les $\pm X \pm Y$ ont même loi.

Donc $P(X > Y) = P(Z > 0) = \frac{1}{2}P(Z \neq 0) = \frac{1}{2}(1 - P(Z = 0))$.