Interrogation n°12. *Barème sur 23 pts. Durée 1h15*

1) a) [2 pts] Soit E un espace euclidien de dimension n.

Soit $u \in S(E)$ un endomorphisme symétrique. On suppose $\boxed{\operatorname{tr} u = 0}$.

Démontrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle x, u(x) \rangle = 0$.

b) [1.5 pt] Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\operatorname{tr} A = 0$.

Montrer que A est orthosemblable à une matrice de la forme $A' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & B \end{array}\right)$, où $B \in S_{n-1}(\mathbb{R})$ symétrique,

c'est-à-dire il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^{-1}AU = A'$.

c) *Question supplémentaire, hors-interrogation*

Avec les hypothèses de b), montrer que A est orthosemblable à une matrice de diagonale nulle.

2) [2 pts] Soient X, Y, Z trois variables aléatoires.

On suppose X indépendante de (Y, Z) , $E(|X|) < +\infty$ et $E(Y^2 + Z^2) < +\infty$.

Montrer que XYZ est d'espérance finie, et montrer que $|E(XYZ)| \leq \frac{1}{2} E(|X|) E(Y^2 + Z^2)$.

3) [2 pts] Soient X et Y deux variables entières (à valeurs dans $\mathbb{N}$) indépendantes et de même loi.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(X = n)$.

a) Soit un nombre complexe z tel que $|z| \leq 1$.

Justifier que z^X est d'espérance finie, et exprimer $E(z^X)$ en fonction de z et des a_n.

Remarque : Il s'agit ici d'une question de cours.

b) Pour $|z| \leq 1$, on pose $G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Exprimer sans justification G_{X+Y} et G_{2X} en fonction de G_X.

4) *Marches aléatoires biaisées*

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables indépendantes et de même loi que X, où

$$P(X = 1) = p \ \text{ et } \ P(X = -1) = q \ , \text{ où } q = 1 - p$$

On a ainsi $\boxed{X_n = 1 - 2Z_n}$, où Z_n est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre q.

On pose $\boxed{S_n = X_1 + ... + X_n}$ et on suppose $\boxed{p > q, \text{ c'est-à-dire } p > \frac{1}{2}}$.

a) [0.5 pt] Justifier (sans calcul !) que les variables Z_n sont indépendantes. On pose $T_n = Z_1 + ... + Z_n$.

b) [1.5 pt] Pour $k \in [\![0, n]\!]$, expliciter $P(S_n = n - 2k)$. Donner sans justification $\mu_n = E(S_n)$ et $V(S_n)$.

c) [1 pt] En utilisant Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\lim_{n \to +\infty} P(S_n \leq 0) = 0$.

5) a) [1.5 pt] Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une v.a. entière de moment d'ordre 2 fini.

En utilisant deux inégalités connues, montrer que

$$\frac{E(X)^2}{E(X^2)} \leq P(X > 0) \leq E(X)$$

b) [1 pt] On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ : on a $G_X(t) = \exp(\lambda(t-1))$.

Donner *sans justification* les valeurs des trois termes $a = \dfrac{E(X)^2}{E(X^2)}$, $b = P(X > 0)$ et $c = E(X)$.

6) Soient $X_0, X_1, ..., X_n$ des variables i.i.d. de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on considère l'événement $A_i = (X_{i-1} = X_i)$ et Y_i sa fonction indicatrice.

On pose $q = 1 - p$ et $r = pq \in [0, \frac{1}{4}]$. On a ainsi $p + q = 1$, $p^2 + q^2 = 1 - 2r$ et $p^3 + q^3 = 1 - 3r$.

a) [1 pt] Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Exprimer $\boxed{\mu = E(Y_i)}$ et $\boxed{\omega = V(Y_i)}$ en fonction de $r = pq$.

b) [2 pts] Calculer $\boxed{\delta = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)}$ et calculer $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_i)$ pour tout $i \in \{3, 4, ..., n\}$.

c) [1 pt] On pose $M_n = \mathrm{card}\{i \in [\![1, n]\!] \mid X_{i-1} = X_i\}$. Exprimer $E(M_n)$ et $V(M_n)$ en fonction de n, μ, ω et δ.

d) [1 pt] En déduire que $\left(\dfrac{M_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilités vers μ lorsque n tend vers $+\infty$,

c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{M_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

7) On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0, 1[$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la variable de Bernoulli $Y_n = X_1 X_2 ... X_n$. On prend $Y_0 = 1$.

a) [0.5 pt] Donner sans justification la valeur de $P(Y_n = 1)$.

b) [2 pts] Soit une v.a. entière $N : \Omega \to \mathbb{N}$ qui suit une loi géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(N = n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

On suppose que N et les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes.

On pose $Z = Y_N$, c'est-à-dire $X_1 X_2 ... X_N$. Calculer avec soin $E(Z)$.

8) Soient X et $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires réelles bornées. On suppose $\boxed{E(X) = 0}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1.

a) [0.5 pt] Justifier brièvement que $f(X + Z) \geq f(Z) + Xf'(Z)$.

b) [0.5 pt] On suppose X et Z indépendantes. Montrer que $E(f(X + Z)) \geq E(f(Z))$.

9) Soit $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ une variable aléatoire de loi symétrique : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(X = n) = P(X = -n)$.

Soit Y une v.a. indépendante de X et de même loi que X. On pose $\boxed{Z = X + Y}$.

a) [0.5 pt] Démontrer avec soin que la loi de Z est symétrique.

b) [1 pt] On pose $r = P(X > Y)$. Montrer que $r = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}P(Z = 0)$.