Interrogation n°11. Corrigé.

1) a) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle X, P^T APX \rangle = \langle PX, APX \rangle = \langle Y, AY \rangle \geq 0$. Donc $P^T AP$ est positive.

b) *Première preuve* : On applique a) en prenant $P = \mathrm{Diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$.

Seconde preuve : On a $\sum_i \sum_j b_{ij} x_i x_j = \sum_i \sum_j a_{ij} \mu_i \mu_j x_i x_j = \sum_i \sum_j a_{ij} (\mu_i x_i)(\mu_j x_j) = \langle Y, AY \rangle$, avec $y_i = \mu_i x_i$.

c) Si A et B sont positives, alors $\langle X, (A+B)X \rangle = \langle X, AX \rangle + \langle X, BX \rangle \geq 0$.

d) Supposons (i).
Par le th spectral, A s'écrit $UDU^{-1} = UDU^T$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, et $\lambda_i \geq 0$.
On a $D = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{ii}$. Donc $D = \sum_{i=1}^n (\mu_i E_i)(\mu_i E_i)^T$, avec $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.
Avec $Z_i = \mu_i U E_i$, on obtient donc bien $A = \sum_{k=1}^n Z_k Z_k{}^T$.

Supposons (ii) : A est symétrique comme somme des matrices symétriques $Z_k Z_k^T$.
Par c), il suffit donc de prouver que ZZ^T est positive. Or, $\langle X, ZZ^T X \rangle = (Z^T X)^2 = \langle Z, X \rangle^2 \geq 0$.

e) On sait par d) que B s'écrit $\sum_{k=1}^n Z_k Z_k^T$.
Dans le cas où $B = ZZ^T$, on a $b_{ij} = \mu_i \mu_j$, donc par b), la matrice $C = (a_{ij} \mu_i \mu_j)$ est positive.
Dans le cas général, $B = \sum_{k=1}^p Z_k Z_k^T$.
Donc C est la somme des matrices $C_k = (a_{ij} \lambda_i^{(k)} \lambda_j^{(k)})$, où les $\lambda_i^{(k)}$ sont les coefficients du vecteur Z_k.
Ainsi, C est positive par c) comme somme de matrices positives.

2) a) On a $(X \mid AX) = \frac{1}{2}(X \mid UX) + \frac{1}{2}(X \mid U^T X) = (X \mid UX)$.
Par Cauchy-Schwarz, $|(X \mid UX)| \leq \|X\| \, \|UX\| = \|X\|^2$, car U conserve la norme : $\|UX\| = \|X\|$

b) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
Par a), $|(X \mid AX)| \leq \|X\|^2$, donc $|\lambda| \, \|X\|^2 \leq \|X\|^2$, et comme X n'est pas nul, $|\lambda| \leq 1$.

3) On a $a_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$. *Remarque* : En particulier $a_{ii} = \langle e_i, u(e_i) \rangle$. Comme $u \in S^{++}(E)$, $\boxed{a_{ii} > 0}$.
Comme $u \in S^{++}(E)$, la forme bilinéaire $\varphi : (x, y) \longmapsto \langle x, u(y) \rangle$ est un produit scalaire.
Donc par Cauchy-Schwarz, $\varphi(e_i, e_j)^2 \leq \varphi(e_i, e_i)\varphi(e_j, e_j)$, c'est-à-dire $a_{ij}^2 \leq a_{ii} a_{jj}$.
L'inégalité $a_{ij}^2 < a_{ii} a_{jj}$ est en fait stricte car e_i et e_j ne sont pas colinéaires.

4) a) On considère $f : O_n^+(\mathbb{R}) \to O_n^-(\mathbb{R}) \quad U = (U_1, ..., U_n) \longmapsto V = (U_1, ..., U_{n-1}, -U_n)$.
On a bien $(V_1, ..., V_n)$ base orthonormée et $\det V = -\det U = -1$.
Enfin, f est bijective, car tout $V \in O_n^-(\mathbb{R})$ admet $U = (V_1, ..., V_{n-1}, -V_n) \in O_n^+(\mathbb{R})$ comme unique antécédent.

b) ($\Rightarrow$) Si A est symétrique, alors par le th spectral A est orthosemblable à une matrice diagonale : il existe $U = (U_1, ..., U_n) \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $U^{-1}AU = D$.
Ainsi, $(U_1, ..., U_n)$ est une BON de vecteurs propres. Si $U_n \in E_\lambda$, on a $-U_n \in E_\lambda$.
Donc $(V_1, ..., V_n)$ défini au a) est aussi une BON de vecteurs propres et vérifie donc $V^{-1}AV = D$.
D'où le résultat, car U ou V appartient à $O_n^+(\mathbb{R})$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, si D diagonale et $U \in O_n^+(\mathbb{R})$, la matrice $A = UDU^{-1} = UDU^T$ est bien symétrique.

5) a) On a $P(\theta)$ symétrique réelle donc diagonalisable.
De plus, $\det P(\theta) = 0$. Donc $\mathrm{Sp}(P(\theta)) = \{0, \mathrm{tr}\, P(\theta)\} = \{0, 1\}$
On en déduit que f_θ est une projection orthogonale.

Remarque : Avec $Z = (\cos\theta, \sin\theta)$, on a $P(\theta) = ZZ^T$ et $f(X) = (Z \mid X)Z$ projection orthogonale sur $\mathbb{R}Z$.

b) λ et μ sont les racines de $x^2 - 2x + (\sin\theta)^2 = 0$, donc $\lambda(\theta) = 1 + |\cos\theta|$ et $\mu(\theta) = 1 - |\cos\theta|$.
On a $\lambda(\theta) + \mu(\theta) = 2$, donc Δ est inclus dans la droite $x + y = 2$.
Or, $\lambda(\theta)$ décrit $[1, 2]$. On en déduit que Δ est le segment d'extrémités $(1, 1)$ et $(2, 0)$.

Remarque : Lorsqu'on considère deux projections orthogonales sur des droites, on peut toujours trouver une BON où les matrices de ces deux projections sont respectivement $P(0)$ et $P(\theta)$.
En effet, on choisit une BON de diagonalisation pour la première donnant $P(0)$, et pour la seconde, on note que la matrice $P(\theta)$ est $UP(0)U^{-1}$, où U est la matrice de rotation d'angle θ.

6) a) $P(d \text{ divise } X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\lambda(dq)^2} = \dfrac{1}{d^2}$.
b) Par additivité, on a : $p = P(X \text{ et } Y \text{ pairs}) + P(X \text{ et } Y \text{ impairs})$.
Comme X et Y sont indépendants, on obtient : $p = P(X \text{ pair})^2 + P(X \text{ impair})^2 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{5}{8}$.

c) On considère une famille FINIE $(p_1, ..., p_n)$ de nombres premiers distincts.
Posons $A_k : p_k$ divise X. On a $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ ssi $m = p_1...p_n$ divise X.
On a $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(m \text{ divise } X) = \dfrac{1}{m^2} = \dfrac{1}{p_1^2...p_n^2} = P(A_1)...P(A_n)$.
Donc les événements $(p_n \text{ divise } X)$ sont mutuellement indépendants.

7) On considère $B_0 = A_0$ et $\forall p \in \mathbb{N}^-$, $B_p = A_p \setminus A_{p-1}$.
Les familles $(x_n)_{n\in A_p}$ et $(x_n)_{n\in B_p}$ sont sommables comme sous-familles de la famille sommable $(x_n)_{n\in E}$.
Comme A_p est la réunion disjointe des B_k avec $0 \leq k \leq p$, on a $S_p = \sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{n\in B_k} x_n\right)$.
Or, E est la réunion disjointe des B_p. Donc $\lim_{p\to+\infty} S_p = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n\in B_p} x_n\right) = \sum_{n\in E} x_n$.

8) a) La famille $\left(\dfrac{1}{2^{\varphi(r)}}\right)_{r\in\mathbb{Q}}$ est sommable, car $\varphi(r)$ décrit $\mathbb{N}^*$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1$.
Donc f est bien définie, et $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout réel x.
Considérons une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{Q}$ telle que $P(X = r) = \dfrac{1}{2^{\varphi(r)}}$.

Remarque : On peut prendre $X : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $r \longmapsto r$ où $\mathbb{Q}$ est muni de la tribu $P(\mathbb{Q})$ et de la loi $P(\{r\}) = \dfrac{1}{2^{\varphi(r)}}$.

b) On a $f(x) = P(X \leq x)$.
Pour $x \geq y$, on a $(X \leq x) \subset (X \leq y)$, donc $P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$, c'est-à-dire $f(x) \leq f(y)$.
(*Variante sans les probas* : On a $\Delta(x) \subset \Delta(y)$, donc $f(x)$ est une sous-somme de $f(y)$).

Considérons l'événément $A_n : (X \leq n)$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$.
Donc par continuité croissante $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\Omega) = 1$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} f(n) = 1$.

Remarque : Comme f est croissante, alors $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe t elle vaut donc aussi 1.
(Noter l'importance d'utiliser une intersection *dénombrable* pour pouvoir appliquer le cours).
Variante : On peut aussi déduire $\lim_{n\to\infty} f(n) = 1$ de l'exercice 7), avec $S_n = \sum_{r\leq n} \dfrac{1}{2^{\varphi(r)}}$.
Autre preuve sans théorème admis : On fixe p. On montre que pour x assez grand, tous les termes 2^{-k}, avec $k \leq p$, sont dans la somme $f(x)$, donc pour x assez grand, $f(x) \geq 1 - \sum_{k=p+1}^{+\infty} 2^{-k} \geq 1 - 2^{-p}$.

c) On a $\bigcap_{n\geq1}(X \leq \frac{1}{n}) = (X \leq 0)$, donc par continuité décroissante $L_0^+ = P(X \leq 0) = f(0)$.
Et de même $\bigcup_{n\geq1}(X \leq -\frac{1}{n}) = (X < 0)$, donc continuité croissante $L_0^- = P(X < 0) = f(0) - 2^{-\varphi(0)}$.

Remarque : La fonction f est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$, est continue en tout irrationnel, et en chaque rationnel r est continue à droite et admet une limite à gauche, avec $\lim_{r^+} f - \lim_{r^-} f = 2^{-\varphi(r)}$.