Interrogation n°11. *Barème sur 24 pts. Durée 1h15*

1) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

On dit que A est positive ssi $\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\langle X, AX\rangle = X^T AX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \geq 0$.

a) [1 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive.

Montrer que pour toute matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $B = P^T AP$ est positive.

Indication : Écrire $\langle X, BX\rangle$ sous la forme $\langle Y, AY\rangle$.

b) [1 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et $\mu_1, ..., \mu_n$ des réels.

On pose $b_{ij} = a_{ij}\mu_i\mu_j$. Montrer que B est positive.

c) [0.5 pt] Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices positives. Montrer que $A + B$ est positive.

d) [2.5 pts] Montrer qu'une matrice A est *symétrique positive* ssi elle peut s'écrire comme somme de matrices de la forme ZZ^T, avec $Z \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit, il s'agit de prouver l'équivalence des deux assertions :

(i) A est *symétrique positive*

(ii) Il existe dans $\mathbb{R}^n$ des vecteurs $Z_1, ..., Z_p$ tels que $A = \sum_{k=1}^p Z_k Z_k^T$.

Indication : Noter que la matrice diagonale E_{ii} s'écrit $(E_i)(E_i)^T$, où E_i est le i-ième vecteur canonique.

e) [2 pts] (★) Soient A et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices *symétrique positives*. On pose $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$.

En utilisant les questions précédentes b), c) et d), montrer que C est positive.

2) [2.5 pts] Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice *orthogonale*. On pose $A = \dfrac{1}{2}(U + U^T) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) On munit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Que vaut $\|UX\|$? En déduire que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $|(X \mid AX)| \leq \|X\|^2$.

b) Justifier que A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) \subset [-1, 1]$.

3) [2 pts] Soit $u \in S^{++}(E)$ un endomorphisme *symétrique défini positif* d'un espace euclidien E.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. On pose $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$.

Soient i et $j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. Montrer que $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$.

Indication : Utiliser les propriétés connues de la forme bilinéaire $\varphi(x, y) = \langle x, u(y)\rangle$.

4) a) [1 pt] Expliciter une bijection $f : O_n^+(\mathbb{R}) \to O_n^-(\mathbb{R})$ en justifiant votre réponse.

Remarque : On pourra poser $U = (U_1, ..., U_n)$, où les U_j sont les colonnes de U.

b) [2.5 pts] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est *directement orthosemblable* à une matrice B ssi il existe une matrice de rotation $U \in O_n^+(\mathbb{R})$ telle que $U^{-1}AU = B$.

Montrer que A est symétrique ssi elle est *directement orthosemblable* à une matrice diagonale.

5) a) [1.5 pt] On pose $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$.

On note $f_\theta : X \longmapsto P(\theta)X$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (muni du psc) canoniquement associé à $P(\theta)$.

Justifier que f_θ est une projection orthogonale.

b) [2 pts] On considère $M(\theta) = P(0) + P(\theta) = \begin{pmatrix} 1+\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$.

On note $\lambda(\theta)$ et $\mu(\theta)$ les valeurs propres de $M(\theta)$, avec $\lambda(\theta) \geq \mu(\theta)$.

On a $\operatorname{tr} M(\theta) = 2$ et $\det M(\theta) = \sin^2\theta$. En déduire que $\lambda(\theta) = 1 + |\cos\theta|$.

($\bigstar$) Représenter dans le plan l'ensemble Δ des couples $(\lambda(\theta), \mu(\theta))$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$.

6) On considère une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ de loi définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{n^2},\ \text{où } \lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

a) [0.5 pt] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère l'événement A_d : (d divise X). Montrer que $P(A_d) = \dfrac{1}{d^2}$.

b) [1.5 pt] On considère une autre v.a. Y de même loi que X, et on suppose X et Y indépendantes.

Donner la probabilité p pour que X et Y aient la même parité (c'est-à-dire qu'ils soient congrus modulo 2).

c) [1 pt] On note $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, ...\}$ l'ensemble des nombres premiers.

Montrer que les événements A_p, où $p \in \mathcal{P}$, sont mutuellement indépendants.

7) [1 pt] Soit E un ensemble au plus dénombrable.

Soit une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de parties de E croissante pour l'inclusion et dont la réunion vaut E.

Soit $(x_n)_{n\in E}$ une famille sommable de réels.

On pose $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum_{n\in A_p} x_n$. Montrer que $\lim_{p\to+\infty} S_p = \sum_{n\in E} x_n$.

Indication : Utiliser la propriété de sommation par paquets dans les familles sommables.

8) [1.5 pt] On sait qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x, on considère $\Delta(x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq x\}$.

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{r\in\Delta(x)} \dfrac{1}{2^{\varphi(r)}}$.

a) Déterminer la valeur de $s = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \dfrac{1}{2^{\varphi(r)}}$.

On en déduit (*admis ici*) l'existence d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{Q}$ telle que $\forall r \in \mathbb{Q}$,

$$P(X = r) = \frac{1}{2^{\varphi(r)}}$$

b) Exprimer $f(x)$ à l'aide de X et de x. Montrer que f est croissante et que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

c) ($\bigstar$) Déterminer les valeurs de $L_0^+ = \lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $L_0^- = \lim_{n\to+\infty} f\left(-\dfrac{1}{n}\right)$.

Interrogation n°11. Addendum

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace euclidien E et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une BON de E.

a) Montrer que les assrtions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$

(ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$, c'est-à-dire u antisymétrique

(iii) La matrice réelle $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique, c'est-à-dire $A^T = -A$.

Dans la suite, on suppose u antisymétrique. On a ainsi $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ antisymétrique,

b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre réelle de A, alors $\lambda = 0$.

c) On suppose n impair. Justifier que $\det A = 0$. En déduire $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

d) Pour n pair, donner sans justification un exemple de matrice antisymétrique sans valeur propre réelle.

e) Montrer que $\boxed{A^2 \in S_n^-(\mathbb{R})}$ matrice réelle symétrique négative.

Remarque : On en déduit que les *valeurs propres complexes* de A appartiennent à $i\mathbb{R}$.

f) Soit x est un vecteur propre unitaire de u^2 de valeur propre $\lambda = -\omega^2 < 0$. Montrer que $\mathcal{B} = (x, \frac{1}{\omega}u(x))$ est la BON d'un plan F stable par u. Donner la matrice de $u_{|F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

g) Montrer que si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Remarque : On en déduit alors qu'il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de u est diagonale par blocs de la forme ωJ, où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et un bloc nul O_{n-r}, où $r = \mathrm{rg}\, u$.

Corrigé

a) (i) implique (ii) : On a $\langle x + y, u(x + y)\rangle = 0$, d'où en développant $\langle u(x), y\rangle + \langle x, u(y)\rangle + 0 + 0 = 0$.
(ii) implique (iii) : On a $a_{ij} = \langle e_i, u(e_j)\rangle = -\langle e_j, u(e_i)\rangle = -a_{ji}$, donc A antisymétrique.
(iii) implique (i) : $(X \mid AX) = (A^T X \mid X) = -(AX \mid X) = -(X \mid AX)$, donc $\langle x, u(x)\rangle = 0$.

b) Soit λ une valeur propre de u. Il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. D'où $\langle x, u(x)\rangle = \lambda \|x\|^2$.
Par a), $\langle x, u(x)\rangle = 0$, donc $\lambda = 0$ (car $\|x\|^2 > 0$).

c) On a $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, car n est impair.
Donc $\det u = 0$, c'est-à-dire u non bijectif, c'est-à-dire 0 valeur propre de u. Avec,b), on a $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

d) On peut prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: il s'agit en fait de la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$).

En dimension $n = 2m$, on considère la matrice diagonale par blocs où chaque bloc est la matrice A précédente.

e) On a $A^T = -A$, donc $(A^2)^T = A^2$, et $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $(X \mid A^2X) = (X \mid -A^T AX) = -\|AX\|^2 \leq 0$.
Remarque : En fait, on utilise essentiellement le fait que $A^2 = -A^T A$ est l'opposé d'une matrice de Gram.

Remarque : En trigonalisant A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on montre que les valeurs propres complexes de A^2 sont les carrées de celles de A, donc les valeurs propres complexes de A appartiennent à $i\mathbb{R}$.

f) On a $\langle x, u(x)\rangle = 0$ par la propriété (i) de la question 1). D'où
On a $\|AX\|^2 = -(X \mid A^2X) = \omega^2 \|X\|^2$, donc $\|u(x)\|^2 = \omega^2 \|x\|^2$, et ainsi $\left\|\frac{1}{\omega}u(x)\right\| = 1$.
Donc $\mathcal{B}$ est une BON de $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u_{|F} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ (noter que $u_{|F}$ est antisymétrique).

g) Pour $(x, y) \in F^\perp \times F$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = 0$ car $u(y) \in F$. Donc $\forall x \in F^\perp$, $u(x) \in F^\perp$.

Remarque : La propriété de réduction se prouve par récurrence d'ordre 2 sur n. Si u n'est pas identiquement nulle, il existe x vecteur propre de u^2 : on sait alors que $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u, donc $F^\perp$ est stable par u, et on applique alors l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme antisymétrique $u_{|F^\perp}$.