Interrogation n°10. Corrigé

1) On définit $(e_1, ..., e_n)$ par récurrence forte : $\forall k \in \{1, ..., n\},\ b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, e_i \rangle\ e_i$ et $e_k = \dfrac{b_k}{\|b_k\|}$.

Remarque : En particulier, $b_1 = a_1$.

2) a) On a $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\langle e_j, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle \delta_{ij} = \langle e_j, x \rangle$, donc $\langle e_j, x - y \rangle = 0$.

Par linéarité de $z \longmapsto \langle z, x - y \rangle$, on en déduit que $x - y \in F^{\perp}$.

b) On a $y \in F$ et $x - y \in F^{\perp}$, donc par Pythagore, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2$.

Donc $\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle^2 = \|y\|^2 \leq \|x\|^2$, avec égalité ssi $y = x$, c'est-à-dire $x \in F$.

3) a) Soient $(x, y) \in E_1 \times E_{-1}$.

Comme $u \in O(E)$, alors $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, donc $-\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$, c'est-à-dire $\langle x, y \rangle = 0$.

b) Comme u conserve la norme, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Si u est diagonalisable, alors $E_1 \oplus E_{-1} = E$, et par a), $E_1 \oplus^{\perp} E_{-1} = E$. Donc u est une symétrie orthogonale.

4) On note $q = \mathrm{Id} - p$ la projection orthogonale sur $\mathbb{R}a$.

On a $x = p(x) + q(x) \in H + H^{\perp}$ et $y = p(y) + q(y) \in H + H^{\perp}$, donc $\langle x, y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle + \langle q(x), q(y) \rangle$.

Or, $q(x) = \langle a, x \rangle a$ et $q(y) = \langle a, y \rangle a$, donc $\langle q(x), q(y) \rangle = \langle a, x \rangle \langle a, y \rangle$. D'où le résultat.

5) a) On a $\|y\|^2 \leq \|y + tz\|^2$ donc $P(t) = 2t \langle y, z \rangle + t^2 \|z\| \geq 0$. On en déduit $\langle y, z \rangle = 0$:

On peut le justifier avec le discrimiant de P : on a $\Delta = \langle y, z \rangle^2 \leq 0$, donc $\langle y, z \rangle = 0$.

Autre preuve : si on avait $\langle y, z \rangle \neq 0$, on a $P(t) \sim 2t \langle y, z \rangle$ donc $P(t)$ changerait de signe en $t = 0$.

b) Si F et G orthogonaux, on a par Pythagore $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$, donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Réciproquement, supposons (ii). Soit $(y, z) \in F \times G$. On a $\forall t \in \mathbb{R},\ p(y + tz) = y$.

On a donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|y\| \leq \|y + tz\|$, et par a), $\langle y, z \rangle = 0$, donc F et G orthogonaux.

6) a) (i) équivaut à (ii) car UA_j est la j-ième colonne de UA.

(ii) implique (iii) : Supposons $UA = B$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $B^T B = A^T U^T U A = A^T A$, car $U^T U = I_n$.

(iii) implique (ii) : Supposons $A^T A = B^T B$. Posons $M = BA^{-1}$. On a bien $UA = B$.

Il suffit de prouver que $U \in O_n(\mathbb{R})$.

Or, on a $U^T U = (A^T)^{-1}(B^T B)(A)^{-1} = (A^T)^{-1}(A^T A)(A)^{-1} = I_n$.

Remarque : La propriété reste vraie pour A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais la propriété est plus difficile à prouver.

7) a) Posons $M = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On a $M = A^T A$, donc $\text{Gram}(x_1, ..., x_p) = \det M = (\det A)^2 = (\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_p))^2$.

b) On considère une $\mathcal{B}$ de E. Alors par a), $\text{Gram}(a_1, ..., a_{n-1}, x) = \det_{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_{n-1}, x)^2$.

Comme $y \in \text{Vect}(a_1, ..., a_{n-1})$, alors $\det_{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_{n-1}, x) = \det_{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_{n-1}, x - y)$.

D'où on déduit $\text{Gram}(a_1, ..., a_{n-1}, x) = \text{Gram}(a_1, ..., a_{n-1}, x - y)$.

c) Posons $z = x - y$. Comme $z \in \text{Vect}(a_1, ..., a_{n-1})^{\perp}$, alors on a :

$\text{Gram}(a_1, ..., a_{n-1}, b_n) = \det \left(\begin{array}{c|c} N & O \\ \hline O & \langle z, z \rangle \end{array} \right)$, où $N = (\langle a_i, a_j \rangle)_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Donc $\text{Gram}(a_1, ..., a_{n-1}, x) = \|z\|^2 \times \text{Gram}(a_1, ..., a_{n-1})$, et on conclut avec $d(x, H) = \|z\|$.

8) a) On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du poduit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)\ Q(t)\ e^{-t}\ dt$.

$\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un hyperplan, donc son orthogonal est une droite, qui contient donc un unique polynôme unitaire B.

De plus, B n'appartient pas à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\deg B = n$. D'où l'existence et l'unicité de B.

Remarque : Dans le procédé de Gram-Schmidt, B apparaît comme le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

b) On a par Leibniz, $f^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \dfrac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} e^{-t}$, donc $L(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \dfrac{t^{n-k}}{(n-k)!}$.

On a bien L polynôme unitaire. D'autre part, par IPP, on a $\forall P \in \mathbb{R}[X]$,

$\langle L, P \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} f^{(n)}(t) P(t)\ dt = 0 + \int_0^{+\infty} f(t) P^{(n)}(t)\ dt$, car tous les termes entre [...] sont nuls.

En effet, 0 est un zéro d'ordre n de f, et on a ainsi $\forall j < n$, $f^{(j)}(0) = \lim_{+\infty} f^{(j)} = 0$.

Donc $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle L, P \rangle = 0$. On déduit donc $B = L$.

c) *Première méthode* : Notons $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ les racines de B d'ordre impair appartenant à $]0, +\infty[$.

On pose $P(t) = (t - \alpha_1)...(t - \alpha_r)$. Alors B et P changent de signe en les mêmes points, donc le produit $B(t)P(t)$ garde un signe constant sur $]0, +\infty[$, et ainsi la fonction polynôme BP est continue positive et identiquement nulle.

Donc $\int_0^{+\infty} B(t) P(t)\ e^{-t}\ dt > 0$.

Donc $\deg P \geq n$, ce qui implique $r = n$ et B scindé à racines simples sur $]0, +\infty[$.

Seconde méthode : On utilise le th de Rolle généralisé :

On a $\forall j < n$, $f^{(j)}(0) = \lim_{+\infty} f^{(j)} = 0$.

Par récurrence, on en déduit que $\forall j \leq n$, $f^{(j)}$ admet au moins j zéros sur $]0, +\infty[$.

Donc L admet au moins n racines distinctes sur $]0, +\infty[$, et par degré, L est scindé à racines simples sur $]0, +\infty[$.