Interrogation n°10. *Barème sur 23 pts. Durée 1h05*

1) [2 pts] Soient E un espace euclidien et $(a_1, a_2, ..., a_n)$ une base de E.

On note $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ par le procédé de Gram-Schmidt.

Donner *sans justification* une définition explicite (récursive) des e_k en fonction des a_k.

Remarque : On pourra faire intervenir des vecteurs $b_1, b_2, ..., b_n$ comme dans le cours.

2) [2 pts] Soit $(e_1, e_2, .., e_n)$ une famille orthonormée d'un espace préhilbertien E. Soit $x \in E$.

a) On pose $y = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle \; e_i$. Justifier brièvement que $x - y \in F^{\perp}$, où $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, .., e_n)$.

b) En déduire l'inégalité de Bessel : $\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle^2 \leq \|x\|^2$, et préciser les cas d'égalité.

3) Soit $u \in O(E)$ un automorphisme orthogonal.

a) [1 pt] Montrer que les sev propres $E_1 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$ sont orthogonaux.

b) [2 pts] On suppose que u est de plus diagonalisable. En justifiant votre réponse, donner la nature de u.

4) [1.5 pt] Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $a \in E$ un vecteur unitaire, c'est-à-dire $\|a\| = 1$.

On note p la projection orthogonale sur $H = a^{\perp}$. Montrer que $\langle p(x), p(y) \rangle = \langle x, y \rangle - \langle a, x \rangle \langle a, y \rangle$.

5) Soit E un espace euclidien.

a) [1.5 pt] Soient y et $z \in E$. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|y\| \leq \|y + tz\|$. Montrer que $\langle y, z \rangle = 0$.

b) [2 pts] On suppose $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) p est une projection orthogonale, c'est-à-dire F et G orthogonaux

(ii) $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

6) [3 pts] Soient A et $B \in GL_n(\mathbb{R})$ inversibles. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$, $UA_j = B_j$

(ii) Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $UA = B$

(iii) $A^T A = B^T B$.

7) Pour toute famille $(x_1, ..., x_p)$ d'un espace euclidien, on définit

$$\mathrm{Gram}(x_1, ..., x_p) = \det M \;, \quad \text{où } M = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

a) [1 pt] Soit $\mathcal{B}$ une BON de $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_p)$. Montrer que $\mathrm{Gram}(x_1, ..., x_p) = (\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_p))^2$.

b) [2.5 pts] Soit $H = \mathrm{Vect}(a_1, ..., a_{n-1})$ un hyperplan d'un espace euclidien E de dimension n.
Soit x un vecteur de E. On définit y le projeté orthogonal de x sur H.

Montrer que $\text{Gram}(a_1, ..., a_{n-1}, x) = \text{Gram}(a_1, ..., a_{n-1}, x - y)$, et en déduire

$$d(x, H)^2 = \frac{\text{Gram}(a_1, ..., a_{n-1}, x)}{\text{Gram}(a_1, ..., a_{n-1})}$$

8) a) [1.5 pt] Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier (en utilisant un produit scalaire bien choisi) qu'il existe un unique polynôme B de degré n et unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} B(t)P(t)\ e^{-t}\ dt = 0$$

Remarque : On ne justifiera pas que le produit scalaire utilisé est bien un produit scalaire.

b) [2 pts] On pose $L(t) = (-1)^n f^{(n)}(t)\ e^t$, où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n fois de $f : t \longmapsto t^n e^{-t}$.

Justifier que L est une fonction polynôme en explicitant ses coefficients.

Puis démontrer (sans donner tous les détails du calcul d'intégrale) que $L = B$.

c) [1 pt] Montrer que B est scindé à racines simples et que les racines appartiennent à $]0, +\infty[$.

Suggestion : Considérer $P(t) = (t - \alpha_1)...(t - \alpha_r)$ où les α_j sont LES racines d'ordre impair de B sur $]0, +\infty[$.