Interrogation n°9. Corrigé

1) Supposons $A^p = O_n$. Ainsi, 0 est la seule racine du polynôme annulateur x^p.

Comme χ_A est scindé (sur $\mathbb{C}[x]$), on en déduit que $\chi_A(x) = x^n$.

Réciproquement, supposons $\chi_A(x) = x^n$. Alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (des 0 sur la diagonale), donc $A^n = O_n$.*Autre méthode* : On utilise Cayley-Hamilton.

2) Si M est diagonalisable, alors M admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples.
Alors $P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & O_{p,q} \\ \hline O_{q,p} & P(B) \end{array}\right)$, donc $P(A) = O_p$ et $P(B) = O_q$. Donc A et B sont diagonalisables.

Réciproquement,

supposons qu'il existe des matrices inversibles $Q \in GL_p(K)$ et $R \in GL_q(K)$ telles que $Q^{-1}AQ = D_A$ et $R^{-1}AR = D_B$ diagonales.

En considérant $P = \left(\begin{array}{c|c} Q & O \\ \hline O & R \end{array}\right) \in GL_n(K)$, alors $P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} D_A & O_{p,q} \\ \hline O_{q,p} & D_B \end{array}\right)$ est diagonale.

Autre solution pour la réciproque : On considère des polynômes annulateurs P_A et P_B scindés à racines simples de A et B, et $P = \text{ppcm}(P_A, P_B)$ annule M et est scindé à racines simples.

3) *Remarque* : Il ne faut pas qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u(\mathbb{C}_n[X]) \subset \mathbb{C}_n[X]$, car sinon, la restriction de u à $\mathbb{C}_n[X]$ serait bien définie et admettrait nécessairement (par d'Alembert-Gauss) une valeur propre.

On considère par exemple $u : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X] \quad P(X) \longmapsto XP(X)$.

4) a) On a $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$ et $\dim E_1 = 1$ (car 1 est racine simple).

Ainsi, A est diagonalisable ssi $\dim \text{Ker}\, A = \dim E_0 = 2$, donc ssi $\text{rg}(A) = 1$, donc ssi $\alpha = 0$.

Variante : A est diagonalisable ssi A est une projection, donc ssi $A^2 = I_2$ (on retrouve la CNS $\alpha = 0$).

b) On suppose $\alpha = 0$. On a $E_0 = \text{Vect}(e_1, e_2)$.
En résolvant $AX = X$, on obtient $E_1 = \text{Vect}(\beta, \gamma, 1)$. Donc $P = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

5) Le polynôme caractéristique de A vaut $P(x) = (x-1)(x-2)...(x-n)$. Or, réciproquement, toute matrice dont le polynôme caractéristique vaut $P(x)$ est semblable à A, car $P(x)$ est scindé à racines simples.

Donc T est semblable à A ssi T admet $P(x)$ comme polynôme caractéristique, donc ssi les coefficients diagonaux de T sont $1, 2, ..., n$, dans un ordre *arbitraire*.

6) *Premier cas* : $\lambda \neq \mu$. Alors A est semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Donc $A^n = I_2$ ssi $D^n = I_2$ ssi $\lambda^n = \mu^n = 1$.

Second cas : $\lambda = \mu$. On a $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$. Si $\lambda^n = 1$, alors $n\lambda^{n-1} \neq 0$. Donc $A^n \neq I_2$.

En conclusion, A est diagonalisable ssi λ et μ sont des racines n-ième de l'unité distinctes.

Donc $\mathcal{C}$ est bien une base de E.

b) On a $P(u)(e_j) = (a_0 + a_1\lambda_j + ... + a_{n-1}\lambda_j^{n-1} + \lambda_j^n)e_j = P(\lambda_j)e_j = 0$.

Comme l'endomorphisme $P(u)$ s'annule sur la base $\mathcal{B}$, alors $P(u)$ est identiquement nul.

c) Par b), on a $u^n(x) = -a_0x + a_1u(x) + ... + a_{n-1}u^{n-1}(x)$.

Donc $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} u = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ matrice compagnon.

8) Comme $\operatorname{rg} A = 2$, alors $\dim E_0 = \dim \operatorname{Ker} A = n - 2$.

En considérant une base adaptée à $\operatorname{Ker} A \oplus S$, on obtient A semblable à $\left(\begin{array}{c|c} O_{n-1} & * \\ \hline O & M \end{array}\right)$,

où $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(A) = 0$ et $\operatorname{tr}(M^2) = \operatorname{tr}(A^2) = \Delta \neq 0$.

Donc $\chi_M(x) = (x-\lambda)(x-\mu)$, avec $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda^2 + \mu^2 = \Delta$, donc $\mu = -\lambda$ et $\lambda \neq 0$, d'où $\mu \neq \lambda$.

Les sev propres de A vérifient donc $\dim E_0 + \dim E_\lambda + \dim E_\mu = n$, et ainsi A est diagonalisable.

9) a) Si $AX = \lambda X$, alors $A^kX = \lambda^kX$, donc $P(A)X = P(\lambda)X$.

Supposons λ valeur propre : il existe X non nul tel que $AX = \lambda X$. Si $P(A) = O_n$, alors on a bien $P(\lambda)$.

b) Supposons (i).Ainsi, 0 n'est pas racine de A, donc a fortiori 0 n'est pas valeur propre de A.

Donc A est inversible.

Réciproquement, supposons (ii). On prend $P = \chi_A$ (Cayley-Hamilton), et on a $P(0) = (-1)^n \det A \neq 0$.

c) Posons $\chi_A(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$. On a $a_0 \neq 0$. On a $\chi_A(X) = a_0 + XQ(X)$.

Comme χ_A annule A, alors $AQ(A) = -a_0I_n$, d'où on déduit $A^{-1} = \frac{-1}{a_0}Q(A)$ polynôme en A.

10) χ_u est scindé (par d'Alembert-Gauss) et de degré $n \geq 1$, donc admet une racine λ.

Et λ est ainsi une valeur propre de u.

Comme u et v commutent, alors le sev propre E_λ est stable par v.

La restriction de v à E_λ admet, par le même argument que précédemment, un vecteur propre x.

On a ainsi x vecteur propre commun à u et v.

b) Avec les notations de a), On considère une base $\mathcal{B} = (x, e_2, ..., e_n)$.

On a $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & A_0 \end{array}\right)$ et $B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} v = \left(\begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & B_0 \end{array}\right)$.

Comme $u \circ v = v \circ u$, ces deux matrices commutent, donc $A_0B_0 = B_0A_0$.

En raisonnant par récurrence sur n et en appliquant l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes à A et B, on en déduit que A et B sont cotrigonalisables, donc il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telles que $Q^{-1}A_0Q$ et $Q^{-1}B_0Q$ sont triangulaires supérieures.

11) a) On pose $\chi_A(x) = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)$.

On a $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^n (B - \lambda_k I_p)$, donc $\det \chi_A(B) = \prod_{k=1}^n \det(B - \lambda_k I_p)$.

Ainsi, $\det \chi_A(B) \neq 0$ ssi $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \notin \mathrm{Sp}(B)$, d'où le résultat.

b) *Première méthode* (par les polynômes annulateurs)

Considérons $P_A(x) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (x - \lambda)$ et $P_B(x) = \prod_{\mu \in \mathrm{Sp}(B)} (x - \mu)$.

Comme A et B sont diagonalisables, alors $M_A(A) = O_n$ et $M_B(B) = O_p$.

Posons $P(x) = P_A(x)P_B(x)$. Comme $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$, alors P est scindé à racines simples.

De plus, $P(M) = P_A(M)P_B(M) = \left(\begin{array}{c|c} O & N_a \\ \hline O & P_A(B) \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} P_B(A) & N_b \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

Remarque : On a $P_A(M)P_B(M) = P_B(M)P_A(M)$, ce qui donne aussi $P_B(A)N_a + N_b P_A(B) = O$.

Seconde méthode (par les sev propres)

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Si $AX = \lambda X$, alors $Z = \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 0 \end{array}\right)$ vérifie aussi $MZ = \lambda Z$.

Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$. On pose $Z = \left(\begin{array}{c} X \\ \hline Y \end{array}\right)$. On a $MZ = \mu Z$ ssi $\begin{cases} AX + NY = \mu X \\ BY = \mu Y \end{cases}$

La matrice $(\mu I_n - A)$ est inversible car $\mu \notin \mathrm{Sp}(A)$.

Donc si $BY = \mu Y$, alors le vecteur $Z = \left(\begin{array}{c} (\mu I_n - A)^{-1} Y \\ \hline Y \end{array}\right)$ est inversible.

On considère une base de vecteurs propres $(X_1, ..., X_n)$ de A et une base de vecteurs propres $(Y_1, ..., Y_p)$ de B.

Alors la famille $\left(\begin{array}{c} X_j \\ \hline 0 \end{array}\right)_{1 \leq j \leq n} \bigcup_{1 \leq j \leq n} \left(\begin{array}{c} (\mu_j I_n - A)^{-1} Y \\ \hline Y_j \end{array}\right)_{1 \leq j \leq p}$ est une base de vecteurs propres de M.