Interrogation n°9. *Barème sur 23.5 pts. Durée 1h15*

1) [2 pts] On dit qu'une matrice $\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ est nilpotente ssi il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$.

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente ssi le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = x^n$.

2) [2 pts] Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & O_{p,q} \\ \hline O_{q,p} & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonale par blocs, avec $A \in \mathcal{M}_p(K)$ et $B \in \mathcal{M}_q(K)$.

Montrer que M est diagonalisable ssi A et B sont diagonalisables.

3) [1 pt] Donner sans justification un endomorphisme u de $\mathbb{C}[X]$ n'admettant aucune valeur propre.

4) [3 pts] On considère la matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)$.

a) Donner une CNS sur α, β, γ pour que A soit diagonalisable.

b) Dans le cas où cette condition est vérifiée, expliciter $P \in GL_3(K)$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5) [2 pts] On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale $A = \mathrm{Diag}(1, 2, ..., n)$.

Déterminer (sans calcul !) *toutes* les matrices $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *triangulaires supérieures* semblables à A.

6) [2.5 pts] On considère $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une CNS sur λ et μ pour que $A^n = I_2$.

7) Soit u un endomorphisme d'un K-ev E. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ des scalaires distincts.

On suppose que u admet une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E telle que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = \lambda_j e_j$.

On considère $x = e_1 + e_2 + ... + e_n$.

a) [1 pt] Montrer que $\mathcal{C} = (x, u(x), u^2(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E.

b) [1 pt] On considère le polynôme $P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)...(X - \lambda_n) = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.

Montrer que $P(u) = 0$, c'est-à-dire $a_0 \,\mathrm{Id} + a_1 u + ... + a_{n-1}u^{n-1} + u^n = 0$.

c) [0.5 pt] Donner *sans justification* la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$.

8) [2 pts] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice $\boxed{\text{de rang } 2}$.

On suppose $\mathrm{tr}\, A = 0$ et $\mathrm{tr}\, A^2 \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

9) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

a) [0.5 pt] Justifier la propriété du cours :

Si P est un polynôme annulateur de A, alors toute valeur propre λ de A est racine de P.

b) [1 pt] Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La matrice A admet un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) \neq 0$

(ii) La matrice A est inversible.

c) [1 pt] (★) On suppose $A \in GL_n(K)$. Montrer que la matrice A^{-1} est un polynôme en A.

10) Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-ev E de dimension finie $n \geq 1$. On suppose $u \circ v = v \circ u$.

a) [1.5 pt] Montrer que u et v admettent au moins un vecteur propre commun.

b) [*Question hors-interrogation*] Montrer que u et v sont cotrigonalisables.

11) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. *Les deux questions sont indépendantes.*

a) [1 pt] Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible ssi $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

b) [1.5 pt] (★) On suppose $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$ et que les matrices A et B sont diagonalisables.

On considère $M = \left(\begin{array}{c|c} A & N \\ \hline O_{p,n} & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$, où $N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable.