Interrogation n°8. Corrigé

1) On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à $F \oplus G$, où G est un supplémentaire de F dans E.

On considère l'isomorphisme $\phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(K)$ définie par $\phi(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$.
Alors Δ est l'image réciproque par φ du sev Δ' des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right)$, où $A \in \mathcal{M}_p(K)$.
On en déduit que $\dim \Delta = p^2 + (n-p)n$.

2) En développant le déterminant suivant la première ligne, on obtient $d = (-1)^{n-1} \times n \times 1^{n-1} = (-1)^{n-1} \times n$.

3) a) $M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. b) $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}, E_{11} - E_{21})$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f = \mathrm{Diag}(1, 1, 1, -1)$.

4) a) La matrice M est la matrice (de $\mathcal{M}_{n+1}(K)$) dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la première surdiagonale qui valent respectivement $1, 2, 3, ..., n$.

b) On considère $\mathcal{B}' = (1, X, \frac{1}{2}X^2, ..., \frac{1}{n!}X^n)$. La matrice $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\, u$ contient des 1 sur sa surdiagonale.
En effet, en notant $P_k = \frac{1}{k!}X^k$, on a $u(P_0) = 0$ et $u(P_k) = P_{k-1}$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

5) Si $p < n$, alors $AB \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A) \leq p$, donc $\det(AB) = 0$. De même si $p > n$ avec BA.

6) a) On a $Q(t) = \det(A_1 + tB_1, ..., A_3 + tB_3)$.
En développant par 3-linéarité, on obtient $Q(t) = \det A + \alpha t + \beta t^2 + t^3 \det B$. D'où le résultat, car $\det B = 0$.

b) On a $Q(0) = Q(1) = Q(-1) = 0$ et $\deg Q \leq 2$, donc Q est identiquement nul.

7) a) On ajoute à la première colonne la somme des autres : on obtient une première colonne où tous les coefficients valent $(n-1)$, qu'on met en facteur (par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne).

Ensuite, on retranche aux autres colonnes la première :

On obtient $\det A = (n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$.

b) On a $\mathrm{rg}\, J = 1$, donc $\dim \mathrm{Ker}\, u = n - 1$. Donc J est trigonalisable semblable à $\left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & \lambda \end{array}\right)$, avec $\lambda = \mathrm{tr}\, J = n$.
Donc n est valeur propre, et par dimension $E_0 \oplus E_n = \mathbb{C}^n$, donc J est diagonalisable.
Ainsi $J \sim \mathrm{Diag}(0, 0, ..., 0, n)$ et comme $A = J - I_n$, alors $A \sim \mathrm{Diag}(-1, -1, ..., -1, n-1)$.
Donc $\det A = (n-1)(-1)^{n-1}$.

c) Par n-linéarité du déterminant par rapport aux lignes, on obtient $\det B = (\lambda_1 ... \lambda_n) \det A$.

8) a) On a $\sum_{i=1}^n x_i C_{ij} = \det(A_1, ..., A_{j-1}, X, A_{j+1}, ..., A_n)$.

b) Lorsque $j = k$, $\sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} = \det(A_1, ..., A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, ..., A_n) = \det A$.

Lorsque $j \neq k$, $\sum_{i=1}^n a_{ik} C_{ij} = \det(A_1, ..., A_{j-1}, A_k, A_{j+1}, ..., A_n) = 0$ car il y a deux colonnes égales.

Remarque : On en déduit aisément que $AC^T = (\det A)I_n$, où C est la matrice des cofacteurs.

Ainsi, si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A}C^T$.

9) a) On considère l'endomorphisme u canoniquement associé à $E_{ii} = \mathrm{Mat}_{(e_1,...,e_n)}\, u$.

On considère $\mathcal{B}'$ obtenue en permutant dans $\mathcal{B}$ les vecteurs e_i et e_j.

On obtient $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\, u = E_{jj}$. En particulier, on a $u(e_i) = e_i$ et $e_j^{'} = e_i$, donc $u(e_j') = e_j'$.

b) Soit $i \neq j$. Il suffit (par transitivité) que E_{12} est semblable à E_{ij}.

On suppose $E_{ij} = \mathrm{Mat}_{(e_1,...,e_n)}\, u$. On considère $\mathcal{B}' = (e_i, e_j, ...)$ obtenue en permutant les vecteurs de $\mathcal{B}$ de sorte à mettre en première position e_i et e_j. Comme $u(e_j) = e_i$, on obtient $u(e_2') = e_1$.

On obtient $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\, u = E_{12}$.

c) On a $\operatorname{tr} E_{ii} = 1$ et $\operatorname{tr} E_{ij} = 0$, donc a fortiori, E_{ii} et E_{ij} ne sont pas semblables.

10) a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et on utilise le développement du déterminant.

On note Δ_{ij} et Δ'_{ij} les cofacteurs respectivement de A et B. Il s'agit de déterminants d'ordre $(n-1)$ vérifiant les mêmes propriétés que A et B, c'est-à-dire à coefficients entiers, et les coefficients ont 2 à 2 mêmes parités.

On a $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1}\Delta_{i1}$, et par hyp de rec, les Δ_{i1} sont des entiers donc $\det A$ est un entier.

De plus, modulo 2, $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1}\Delta_{i1} \equiv \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} b_{i1}\Delta'_{i1}$ par hyp de réc, donc on conclut par récurrence.

b) Par a), $\det B$ est un entier de même parité que $\det A$, où A est la matrice définie au 7).

Si n est pair, $\det A$ est impair, car $\det A = (n-1)(-1)^{n-1}$, donc $\det B$ est impair, et donc non nul.

11) a) Supposons (i) faux.

Alors il existe $x_1, ..., x_n$ réels distincts tels que la matrice $(f_j(x_i))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ n'est pas inversible.

Une matrice n'est pas inversible ssi les vecteurs colonnes forment une famille liée.

Donc il existe $(a_1, ..., a_n)$ non nul tel que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_j f_j(x_j) = 0$.

Donc (ii) est faux, car $\sum_{j=1}^{n} a_j f_j$ admet au moins n zéros.

Réciproque analogue (on pourrait en fait raisonner par équivalence) :

Supposons (ii) faux :

il existe $(a_1, ..., a_n)$ non nul tel que $f = \sum_{j=1}^{n} a_j f_j$ admet n zéros distincts $x_1, ..., x_n$.

Alors $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_j f_j(x_j) = 0$. Donc la matrice $(f_j(x_i))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ n'est pas inversible.

b) Soient $x_1 < ... < x_n$ et $y_1 < ... < y_n$.

On considère $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \quad t \longmapsto D(z_1(t), ..., z_n(t))$, où $z_i(t) = (1-t)x_i + ty_i$.

On a $\forall t \in [0,1]$, $z_1(t) < z_2(t) < .... < z_j(t)$, donc par a) $\varphi(t) \neq 0$.

De plus, $\varphi(t)$ est une combinaison des $f_j(z_i(t))$, donc φ est une fonction continue en t.

On a donc φ de signe constant, et ainsi, $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ ont même signe.

On montre ainsi que $D(x_1, ..., x_n)$ et $D(y_1, ..., y_n)$ ont même signe, ce qui donne le résultat.