Interrogation n°7. *Barème sur 23 pts. Durée 1h15*

1) [1 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

On note $F = \{X \in K^p \mid AX = 0\}$ le sev des $X \in K^p$ tels que $\boxed{AX = 0}$ (vecteur nul de K^n).

On pose $r = \operatorname{rg} A$. Exprimer sans justification $\dim F$ (en fonction de n, p et r).

2) [2.5 pts] Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$. On note a et b les endomorphismes de K^n associés à A et B.

a) Montrer que $\operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$.

b) Montrer que $\operatorname{rg}(A+B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

3) [1 pt] On considère la matrice $J = (\delta_{i=j-1 \bmod n})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Expliciter J^{-1}. *Indication* : On pose $u : K^n \to K^n \ X \longmapsto JX$ et on pourra considérer les E_j.

4) On note $\mathcal{T}_n$ le sev des matrices triangulaires supérieures. On a : $A \in \mathcal{T}_n$ ssi $\forall i > j$, $a_{ij} = 0$.

a) [1 pt] Soit $C = AB$ une matrice produit de deux matrices A et B triangulaires supérieures.

En explicitant le coefficient c_{ik} de C, montrer que C est elle aussi triangulaire supérieure.

b) [1.5 pt] Soit A une matrice triangulaire supérieure inversible, c'est-à-dire $A \in \mathcal{T}_n \cap GL_n(K)$.

En considérant $\varphi : \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}_n \ \ B \longmapsto AB$, montrer que $A^{-1} \in \mathcal{T}_n$.

5) Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O_{n-r,r} & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ où $\boxed{A \in GL_r(K)}$ matrice carrée inversible d'ordre r.

a) [1 pt] Expliciter une matrice de la forme $P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & * \\ \hline O_{p-r,r} & I_{p-r} \end{array}\right)$ telle que $MP = \left(\begin{array}{c|c} A & O_{r,p-r} \\ \hline O_{n-r,r} & B \end{array}\right)$.

b) [1 pt] A-t-on nécessairement $\operatorname{rg} M = r + \operatorname{rg} B$?

6) [2 pts] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. *Remarque* : Ici, on ne suppose pas E de dimension finie.

Montrer que u est une projection (sur un sev F parallèlement à un sev G qu'on précisera).

Indication : Utiliser $x = u(x) + (x - u(x))$.

7) [2.5 pts] Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ une matrice $\boxed{\text{de rang } r}$. On sait que $r \leq \min(n, p)$.

Montrer que $r = n$ ssi il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ telle que $AB = I_n$.

8) [1.5 pt] a) Soit $A=(A_1,...,A_p)\in\mathcal{M}_{n,p}(K)$ une matrice $\boxed{\text{de rang } p}$. On pose $\boxed{r=n-p}$.

On note $(E_1,...,E_n)$ la base canonique de K^n. Justifier (*avec le cours*) qu'il existe une partie $\Delta\subset\{1,2,...,n\}$ de cardinal r telle que $(A_1,...,A_p)\cup(E_j)_{j\in\Delta}$ est une base de K^n.

b) On prend ici $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Expliciter une valeur possible de Δ.

9) [1 pt] Soit $(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$. On considère $E_{ij}\in\mathcal{M}_{p,n}(K)$ matrice de la base canonique.

Donner, pour $M=(m_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le p}\in\mathcal{M}_{n,p}(K)$, la valeur de $\varphi_{ij}(M)=\mathrm{tr}(ME_{ij})$.

10) Soit $n\geq 2$. On considère dans $E=K_n[X]$ les sev $F=\mathrm{Vect}(1,X)$ et $G=\{X(X-1)Q,\ Q\in K_{n-2}[X]\}$.

a) [1.5 pt] Donner une base de G et justifier (par une propriété connue) que $F\oplus G=E$.

b) [1 pt] On note Δ l'ensemble des formes linéaires $\varphi:E\to\mathbb{R}$ telle que $\forall P\in G$, $\varphi(P)=0$.

Justifier que Δ est un sev (de $\mathcal{L}(E,K)$) et déterminer $\dim\Delta$.

Conseil : Considérer $L=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},1}\,\varphi$ la matrice de φ dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $F\oplus G=E$.

On peut alors en même temps prouver que Δ est un sev et déterminer sa dimension.

c) [1 pt] On considère φ_0 et $\varphi_1:E\to\mathbb{R}$ définies par $\varphi_0(P)=P(0)$ et $\varphi_1(P)=P(1)$. Montrer que $\Delta=\mathrm{Vect}(\varphi_0,\varphi_1)$.

11) [1.5 pt] Montrer que $\mathrm{Vect}(GL_n(K))=\mathcal{M}_n(K)$.

12) On dit qu'une matrice à coefficients réels est positive ssi tous ses coefficients sont positifs ou nuls.

a) [1 pt] Montrer que $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive (on note $A\geq 0$) ssi $\forall X\in K^n$, $(X\geq 0\Rightarrow AX\geq 0)$.

b) [1 pt] (★) On dit qu'une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est monotone ssi A est inversible et $A^{-1}\geq 0$.

Montrer que $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est monotone ssi $\forall X\in K^n$, $(AX\geq 0\Rightarrow X\geq 0)$.