Interrogation n°6. Corrigé

1) On a $A_n(u_{n+1}-u_n)=O(|u_{n+1}-u_n|)$.

Mais la série $\sum |u_{n+1}-u_n|$ converge, car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $|u_{n+1}-u_n|=(u_n-u_{n+1})$.

Donc $\sum A_n(u_{n+1}-u_n)$ converge absolument.

2) a) L'existence de l'intégrale résulte de $e^{-t^2}e^{ixt}=O_{\pm\infty}(e^{-t^2})$, car $e^{-t^2}=O_{\pm\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

L'application $f(t,x)=e^{-t^2}e^{ixt}$ est continue et intégrable en t, et de classe C^∞ en x.

D'autre part, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x)\right|=\left|t^n e^{-t^2}e^{ixt}\right|\le |t|^n\,e^{-t^2}=\varphi_n(t)$.

Comme $\varphi_n(t)=O_{\pm\infty}(1/t^2)$, alors φ_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales paramétrées que F est de classe C^∞.

b) On a $F'(x)=i\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}e^{ixt}\,dt$. Comme $(e^{-t^2})'=-2te^{-t^2}$, on a par IPP,

$F'(x)=\dfrac{i}{2}\left[e^{-t^2}e^{ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-t^2}e^{ixt}\,dt=0-\dfrac{1}{2}xF(x)=-\dfrac{1}{2}xF(x)$.

Sachant $F'(x)=-\dfrac{1}{2}xF(x)$, on obtient donc $F(x)=\lambda e^{-x^2/4}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$, et $\lambda=F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\;dt=\sqrt{\pi}$.

3) a) La fonction $h:(x,t)\longmapsto\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

Les fonctions $t\longmapsto h(x,t)$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$, car $h(x,t)\le\dfrac{1}{1+t^2}$.

Pour tout $\forall x\in[a,b]\subset]0,+\infty[$, $\forall t\ge 0$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(t)\right|=2xe^{-x^2(1+t^2)}\le 2be^{-a^2(1+t^2)}\le 2be^{-a^2t^2}\varphi(t)$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

Donc f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et $f'(x)=-2x\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+t^2)}\;dt$.

Mais on a ensuite $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2(1+t^2)}\;dt=e^{-x^2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2t^2}\;d(xt)=e^{-x^2}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\;du=e^{-x^2}$.

Donc $\forall x>0,\;f'(x)=-2e^{-x^2}G$.

b) On a $\forall x\ge 0$, $\left(\forall t\in]0,+\infty[,\;0\le\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\le\dfrac{1}{1+t^2}=\varphi(t)\right)$, et φ intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, on en déduit f continue sur $[0,+\infty[$.

c) $0\le f(x)\le e^{-x^2}\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{1+t^2}\le\dfrac{\pi}{2}e^{-x^2}$. Donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ (par pincement).

Autre preuve : Par cv dominée, avec $\forall x\ge 0$, $\forall t\in]0,+\infty[$, $0\le\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\le\dfrac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$.

d) Comme f est continue sur $[0,+\infty[$ et C^1 sur $]0,+\infty[$, on a : $(\lim_{+\infty}f)-f(0)=\int_0^{+\infty}f'(x)\;dx$.

On a $f(0)=\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{1+t^2}=\dfrac{\pi}{2}$. D'autre part, $\lim_{+\infty}f-f(0)=\int_0^{+\infty}f'(x)\;dx=-2G^2 2G^2=\dfrac{\pi}{2}$.

Comme $G>0$, on obtient $G=\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

4) a) On a, en 0^+, $\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1}\sim t^{x-2}$, donc $t\longmapsto\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1}$ est intégrable sur $]0,1]$, car $x-2>-1$.

b) Pour tout $t>0$, on a $\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1}=t^{x-1}\dfrac{1}{e^t-1}=t^{x-1}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nt}=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)$, avec $f_n(t)=t^{x-1}e^{-nt}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt = \dfrac{1}{n^x}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}\ du = \dfrac{\Gamma(x)}{n^x}$.

Pour tout $x > 1$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\Gamma(x)}{n^x} = \Gamma(x)Z(x) < +\infty$.

Par ailleurs, $f_n : t \longmapsto t^{x-1}e^{-nt}$ et $S : t \longmapsto \dfrac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ sont continues. Donc, par ITT, on a : $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{e^t-1}\ dt = \Gamma(x)Z(x)$.

5) a) Pour $0 \leq x < 1$, la série converge absolument car $(-1)^n x^{\sqrt{n}} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1[$, $f_n(x) = (-1)^n x^{\sqrt{n}}$. On a $\int_0^1 |f_n(x)|\ dx = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$.

On ne peut donc pas appliquer le théorème ITT.

On va appliquer le théorème de convergence dominée à $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$.

Pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum f_n(x)$ vérifie le CSSA (en effet, $(x^{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0).

On a $\forall x \in [0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1[$, $0 \leq S_n(x) \leq f_0(x) = 1$.

Comme f_0 est intégrable, alors $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx$.

Par linéarité, on a donc $\int_0^1 f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n \int_0^1 f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$.

6) a) Comme $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lambda$, alors $|F(x)| \leq |\lambda| + 1$ sur un voisinage $[a,+\infty[$ de $+\infty$, et comme F est continue sur le segment $[0,a]$, alors F est bornée sur $[0,+\infty[$.

b) L'existence est évidente si $x = 0$ (par hypothèse). Supposons $x > 0$.

On a $\int_0^A f(t)\ e^{-xt}\ dt = [F(t)e^{-tx}]_0^A + \int_0^A xF(t)\ e^{-xt}\ dt$. Comme F est bornée, alors $t \longmapsto xF(t)\ e^{-xt}$ est intégrable.

On peut donc faire tendre A vers $+\infty$. D'où l'existence de $L(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-xt}\ dt$, et $L(x) = \int_0^{+\infty} xF(t)\ e^{-xt}\ dt$.

En effectuant le changement de variable $u = xt$, on obtient $L(x) = \int_0^{+\infty} F\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u}\ du$.

c) Posons $\forall u > 0$, $\forall x > 0$, $\varphi(u,x) = F\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u}$.

On a $|\varphi(u,x)| \leq Me^{-u} = \varphi(u)$ pour tout $u \geq 0$, et d'autre part, $\forall u > 0$, $\lim_{x\to 0}\varphi(u,x) = \lambda$.

Par convergence dominée, on en déduit que $\lim_{x\to 0, x>0} L(x) = \int_0^{+\infty}\lambda e^{-u}\ du = \lambda$.

6) d) L'application $f : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}\ \ (x,t) \longmapsto \dfrac{(\sin t)}{t}e^{-xt}$ est de classe C^∞.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

En effet, on a $|\sin t| \leq t$, donc $|f(x,t)| \leq e^{-xt}$ (et comme $x > 0$, la fonction $t \longmapsto e^{-xt}$ est intégrable).

D'autre part, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -e^{-xt}$. Pour tout $\alpha > 0$, une domination uniforme de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ par rapport à $x \in [\alpha,+\infty[$:

$\forall x \geq \alpha$, $\forall t \in]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq e^{-\alpha t} = \varphi(t)$ intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc I est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x > 0$, $I'(x) = -\int_0^{+\infty}(\sin t)e^{-xt}\ dt = -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\ dt\right) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{i-x}\right) = -\operatorname{Im}\left(\dfrac{i+x}{x^2+1}\right) = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

d) On en déduit l'existence d'une constante k tel que pour tout $x > 0$, $I(x) = k - \arctan(x)$.

Pour prouver que $k = \dfrac{\pi}{2}$, il suffit de prouver que $\lim_{x\to+\infty} I(x) = 0$.

Or, on a $|I(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left|\dfrac{e^{-xt}\sin t}{t}\right| \, dt$, et comme $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right| \leq 1$, on a $|I(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, dt = \dfrac{1}{x}$.

Donc par pincement, on a $\lim_{x\to+\infty} I(x) = 0$.

Remarque : On peut aussi prouver $\lim_{x\to+\infty} I(x) = 0$ en utilisant la cv dominée : $\forall x \geq 1$, $\forall t > 0$, $\left|\dfrac{e^{-xt}\sin t}{t}\right| \leq e^{-t}$.

e) L'application $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en 0^+, et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ converge.

On peut donc appliquer a) b) c) et en déduire que I est continue en 0.

On en déduit alors avec d) que $I(0) = \lim_{x\to 0, x>0} I(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

7) a) On a $t^2 \exp(-x(\ln t)^2) = \exp(2\ln t - x(\ln t))^2$.

Comme $x > 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} 2\ln t - x(\ln t) = -\infty$, donc $\exp(2\ln t - x(\ln t)^2) = \mathfrak{o}_{+\infty}(1)$.

A fortiori, $\exp(-x(\ln t)^2) = O_{+\infty}(1/t^2)$, et ainsi, $t \longmapsto \exp(-x(\ln t)^2)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

b) On utilise le changement de variable $u \longmapsto t = \exp\left(\sqrt{\dfrac{u}{x}}\right)$ bijection C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$.

On obtient

$$I(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} J(x), \text{ où } J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} \exp(-u) \exp\left(\sqrt{\frac{u}{x}}\right) \, du$$

On a $\lim_{x\to+\infty} J(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{u}} \exp(-u) \, du = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Donc $I(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$, avec $\lambda = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En effet, on prend ici comme fonction de domination $\forall x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{u}} \exp(-u) \exp\left(\sqrt{\frac{u}{x}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{u}} \exp(-u) \exp(\sqrt{u}) = \frac{\exp(-u + \sqrt{u})}{\sqrt{u}} = \varphi(u)$$

et φ est intégrable car $\varphi(u) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$ en $u = 0$, et $\varphi(u) = O\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ en $+\infty$.