Interrogation n°6. *Barème sur 24 pts. Durée 1h10*

Dans les utilisations du théorème de convergence dominée et des théorèmes sur les intégrales dépendant d'un paramètre, **on se contentera de donner la limite et de justifier uniquement la propriété de domination** permettant de conclure, considérant que les autres propriétés sont "trivialement" vérifiées.

On rappelle par ailleurs que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ du = \sqrt{\pi}$.

1) [2 pts] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante positive et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

Montrer que la série $\sum A_n(u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) \exp(ixt)\, dt$.

a) [2 pts] Montrer brièvement que F est de classe C^∞. On pose $f(x,t) = \exp(-t^2)\exp(ixt)$.

b) [2.5 pts] Montrer que $F'(x) = -\dfrac{1}{2} x F(x)$. En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Il s'agit ici de calculer $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$. On pose $\forall x \geq 0,\ \ f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

a) [2.5 pts] Justifier que $\forall x > 0,\ f'(x) = -2e^{-x^2} G$.

b) [1.5 pt] Justifier que f est continue sur $[0, +\infty[$.

c) [1 pt] Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

d) **[Question hors-interrogation]** En déduire $G = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

4) Pour tout $x > 1$, on pose $Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

a) [1 pt] Justifier brièvement, pour tout $x > 1$, l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{e^t - 1}\ dt$.

b) [0.5 pt] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt}\ dt$ en fonction de $\Gamma(x)$.

c) [2 pts] Montrer que, pour tout réel $x > 1$, on a $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{e^t - 1}\ dt = \Gamma(x) Z(x)$.

5) On considère $\forall x \in [0,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{\sqrt{n}}$.

a) [1 pt] Montrer que $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in [0,1[$.

b) [2 pts] On *admet* la continuité de f. Montrer que $\int_0^1 f(x)\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$.

6) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue. On pose $F(t) = \int_0^t f(u)\ du$.

On suppose que F converge en $+\infty$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \lim_{t\to+\infty} F(t)$.

a) [1 pt] Justifier que la fonction F est bornée sur $[0,+\infty[$. On pose $M = \sup_{t\in[0,+\infty[} |F(t)|$.

b) [1.5 pt] Montrer que $\forall x \geq 0,\ L(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-xt}\ dt$ existe et que $\forall x > 0,\ L(x) = \int_0^{+\infty} F\left(\frac{u}{x}\right)\ e^{-u}\ du$.

c) [1 pt] En utilisant l'expression de L donnée au b), montrer que L est continue en 0.

d) [**Question hors-interrogation**]

On considère $J : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \geq 0,\ J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ e^{-xt}\ dt$.

Montrer que pour tout $\boxed{x > 0}$, $J'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ et que pour tout $x > 0$, $J(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt = \frac{\pi}{2}$.

7) Soit $x > 0$. On considère $I(x) = \int_1^{+\infty} \exp(-x(\ln t)^2)\ dt$.

a) [1 pt] Montrer que $I(x)$ existe.

b) [1.5 pt] Déterminer un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.