Interrogation n°5. Corrigé

1) a) $a_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, donc la série $\sum b_n$ converge ssi $\alpha > 1$ par comparaison avec une série à termes positifs.

a) On a $F(x) = x + x^2 + \mathfrak{o}(x^2)$, donc $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$.

La série alternée $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge par le CSSA. La série $\sum \varepsilon_n$ converge ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Donc la série $\sum b_n$ converge ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

2) - Si $\alpha < 0$, le terme général ne tend pas vers 0.

- Supposons $\alpha > 1$. On a $\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)^\alpha = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Donc $\sum \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^\alpha$ converge.

- Supposons $0 < \alpha < 1$. On a $\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)^\alpha \geq \dfrac{1}{n}$ pour n assez grand, donc $\sum \left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)^\alpha$ diverge.

- Pour $\alpha = 1$: $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ est de même nature que $\int_2^{+\infty} \dfrac{dt}{t\ln t}$, car $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ positive décroissante.

Or, $\int \dfrac{dt}{t\ln t} = \ln\ln t + k$. Donc $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge.

D'où la CNS : $\alpha > 1$.

3) a) Par le critère de D'Alembert, $\sum u_n$ converge (en fait, on a $u_n = O(K^n)$, avec $L < K < 1$).

b) On pose $v_n = \dfrac{u_n}{L^n}$. On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La suite $(\ln v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\mu > 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = e^\mu > 0$, c'est-à-dire $u_n \sim \lambda L^n$ avec $\lambda = e^\mu$.

Remarque : Sans l'hypothèse du b), u_n n'est pas toujours équivalent à une suite λL^n.

Ainsi, par exemple, toute suite $u_n = n^\alpha L^n$ vérifie bien $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$.

4) a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Si elle convergeait vers un réel l, on aurait par passage à la limite $l = l - l^2$, donc $l = 0$.

Ce qui est absurde, car $l \geq u_0 > 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

b) Par Cesàro, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}(u_n^2 - u_0^2) = 2$, donc $\dfrac{1}{n}u_n^2 \sim 2$, c'est-à-dire $u_n \sim \sqrt{2n}$.

c) - On a $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. Par comparaison avec les séries de Riemman, la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ diverge.

- La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n}$ converge par le CSSA.

5) La série est à termes positifs. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p^{2\alpha}} < +\infty$ ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

6) a) On a $R_m \geq \sum_{k=m}^{n} a_k = (n-m+1)a_n$, car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On conclut avec $(n-m+1) = n+1-\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor \geq n+1-\dfrac{n}{2} \geq \dfrac{n}{2}$.

b) Comme $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ (reste), alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2}a_n = 0$ (car $m \to +\infty$), c'est-à-dire $a_n = \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

c) On considère l'exemple de l'exercice précédent en prenant par exemple $\alpha = 1$.

7) a) La fonction $n \longmapsto \dfrac{1}{n+x}$ est décroissante et converge vers 0. On peut donc appliquer le CSSA.

En particulier, on a $0 \leq A(x) \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ (encadrement de la somme). Donc $\lim_{x\to+\infty} A(x) = 0$..

b) On encadre par des intégrales : $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(2t+x)^2} \leq B(x) \leq \int_{-1}^{+\infty} \dfrac{dt}{(2t+x)^2}$.

Or, $\int \dfrac{dt}{(2t+x)^2} = \dfrac{-1}{2(2t+x)}$, d'où on déduit par pincement que $B(x) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2x}$.

c) On a (cf sommes partielles paires), $A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2k+x} - \dfrac{1}{2k+1+x} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+x)(2k+1+x)}$.

Donc $B(x+1) \leq A(x) \leq B(x)$, et ainsi par pincement, $A(x) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2x}$.

8) a) On a $\int_n^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2} \leq W_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{n} \leq W_n \leq \dfrac{1}{n-1}$, donc par pincement, $W_n \sim \dfrac{1}{n}$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe p tel que $\forall k \geq p$, $|\omega_k| \leq \varepsilon \dfrac{1}{k^2}$. Donc $\forall n \geq p$, $|Z_n| \leq \varepsilon W_n$.

Donc $R_n = \mathfrak{o}\,(W_n)$, et par a), on en déduit $R_n = \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

c) On applique b) avec $\omega_n = a_n - \dfrac{1}{n^2} = \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On a donc $R_n - W_n = \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $R_n \sim \dfrac{1}{n}$.

d) On a $u_{n+1} - u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On pose $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Par c), on a $\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) \sim \dfrac{\alpha}{n}$, c'est-à-dire $L - u_n \sim \dfrac{\alpha}{n}$, c'est-à-dire $u_n - L = -\dfrac{\alpha}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

e) On applique d) avec $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

On a en effet $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = -\dfrac{1}{2n^2} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Remarque culturelle :

On peut de même montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$n! \sim \lambda\sqrt{n}n^n e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

En effet, en posant $u_n = \dfrac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}$, on vérifie (avec un DL) que : $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\dfrac{1}{12n^2} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

9) a) Soient α et β vérifiant $0 < \alpha < \lambda < \beta$.

Pour $n \geq n_0$ assez grand, on a $\forall t \geq n$, $-\beta \leq \dfrac{f'(t)}{f(t)} \leq -\alpha$.

Par intégration, $\forall t \geq n$, $-\beta(t-n) \leq \ln f(t) - \ln f(n) \leq -\alpha(t-n)$.

Donc $f(n)e^{-\beta(t-n)} \leq f(t) \leq f(n)e^{-\alpha(t-n)}$.

En particulier, $\sum_{k\geq n} f(k)$ converge car $f(k) = O(e^{-\alpha k})$.

On a $\forall n \geq n_0$,

$$f(n)\sum_{k=n} e^{-\beta(k-n)} \leq R_n \leq f(n)\sum_{k=n} e^{-\alpha(k-n)}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{f(n)}{1-e^{-\beta}} \leq R_n \leq \frac{f(n)}{1-e^{-\alpha}}$$

Soit $0 < \varepsilon < 1$.

On peut choisir $0 < \alpha < \lambda < \beta$ de sorte que $\dfrac{1-\varepsilon}{1-e^{-\lambda}} \leq \dfrac{1}{1-e^{-\beta}} \leq \dfrac{1}{1-e^{-\alpha}} \leq \dfrac{1+\varepsilon}{1-e^{-\lambda}}$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{R_n}{f(n)} = \dfrac{1}{1-e^{-\lambda}}$, c'est-à-dire $R_n \sim \dfrac{f(n)}{1-e^{-\lambda}}$.