Interrogation n°5. *Barème sur 24 pts. Durée 1h20. Le sujet comporte deux pages*

1) On considère la fonction $\boxed{F(x) = x\exp(x)}$. Soit un réel $\boxed{\alpha > 0}$.

a) [1.5 pt] On pose $a_n = F\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Déterminer une CNS sur $\alpha > 0$ pour que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

b) [2.5 pts] On pose $b_n = F\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$. Déterminer une CNS sur $\alpha > 0$ pour que $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

2) [2.5 pts] Donner une CNS sur le réel α pour la série $\sum \left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)^\alpha$ converge.

3) On considère une suite strictement positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L$, avec $\boxed{0 < L < 1}$.

a) [0.5 pt] Préciser (en utilisant directement le cours) la nature de la série $\sum u_n$.

b) [2 pts] On suppose désormais $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda L^n$.

Indication : Considérer et étudier une suite auxiliaire.

4) On considère $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}}$. On a ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

a) [1 pt] Justifier que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) [0.5 pt] On vérifie (*admis ici*) que $\lim_{n\to+\infty}\ (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = 2$.

En utilisant le théorème de Cesàro, donner *sans justification* un équivalent de u_n.

c) [2 pts] Déterminer la nature des séries $\sum \dfrac{1}{u_n}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n}$.

5) [1 pt] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^\alpha} & \text{si } n = p^2 \text{ est un carré entier non nul} \\ 0 & \text{sinon (c'est-à-dire si } n \text{ n'est pas un carré)} \end{cases}$

Donner une CNS sur α pour que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

6) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *décroissante positive.*

On suppose que la série $\sum a_n$ converge. On pose ici $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k}$.

a) [1 pt] Montrer que $\dfrac{n}{2} a_n \leq R_m$, où $m = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$.

b) [0.5 pt] Montrer que $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

c) [1 pt] Donner *un contre-exemple* montrant que b) est fausse si on ne suppose pas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

7) On considère pour tout réel $x > 0$, $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3} + ...$

a) [1 pt] Justifier l'existence de $A(x)$ pour tout $x > 0$, et déterminer $\lim_{x\to+\infty} A(x)$.

b) [1 pt] Donner un équivalent de $B(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+x)^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) [1.5 pt] En déduire un équivalent de $A(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

8) a) [1 pt] On pose $W_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$. Montrer que $W_n \sim \dfrac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) [1 pt] Soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\omega_n = \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On pose $Z_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \omega_k$. Montrer que $Z_n = \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

c) [0.5 pt] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$. On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$. Montrer que $R_n \sim \dfrac{1}{n}$.

d) [1 pt] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\alpha}{n^2} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $L > 0$, et que $u_n - L = -\dfrac{\alpha}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

e) [1 pt] Montrer qu'il existe une constante γ telle que $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

9) (★) *Question supplémentaire.* Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ strictement positive, de classe C^1.

Soit $\lambda > 0$. On suppose $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\lambda < 0$.

Justifier l'existence de $\boxed{R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)}$, et montrer que $R_n \sim \dfrac{1}{1-e^{-\lambda}}\, f(n)$.