Interrogation n°4. Corrigé

1) En 1^+, on a $(\ln t) \sim (t-1)$. Donc, en 1^+, on a $f(t) \sim \dfrac{1}{(t-1)^{y-1}}$. Donc f est intégrable sur $]1,2]$ ssi $y-1<1$.

Posons $z = x+y$. En $+\infty$, $f(t) \sim \dfrac{\ln t}{t^z}$, qui est intégrable sur $[2,+\infty[$ ssi $z>1$.

En effet, supposons $z>1$. En effet, on a $\dfrac{\ln t}{t^z} = O_{+\infty}\left(\dfrac{\ln t}{t^{z-\varepsilon}}\right)$ pour tout $\varepsilon>0$, et on choisit ε tel que $z-\varepsilon>1$.

Si $z \leq 0$, alors $\dfrac{1}{t} = \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{\ln t}{t^z}\right)$, donc $\dfrac{\ln t}{t^z} \geq \dfrac{1}{t}$ pour t assez grand, et f n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$.

Donc l'intégrale converge ssi $y<2$ et $x+y>1$.

2) En 0^+, $\left(\dfrac{\ln t}{1+t}\right)^2 \sim (\ln t)^2 = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. En $+\infty$, $\left(\dfrac{\ln t}{1+t}\right)^2 = O\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$. Donc J converge.

3) a) L'intégrale J converge en 0 car $\dfrac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} \sim \dfrac{1}{2t^{\alpha-1}}$ en $t=0$ et $\alpha-1<1$

et J converge en $+\infty$, car $\dfrac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$ et $\alpha+1>1$.

b) En intégrant par parties, on a $\int_\varepsilon^x \dfrac{\sin t}{t^\alpha}\, dt = \left[\dfrac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\right]_\varepsilon^x + \alpha \int_\varepsilon^x \dfrac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$.

En faisant tendre ε vers 0^+ et x vers $+\infty$, on en déduit que K existe et vaut $K = \alpha J$.

4) On utilise le changement de variable $x = \dfrac{t^2}{n}$, c'est-à-dire $t = \sqrt{nx}$.

L'application $\varphi : u \longmapsto t = \sqrt{nu}$ est une bijection C^1 de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. On a $dt = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{u}}$.

On obtient donc $J = \dfrac{1}{2} n^{(p+1)/2} \int_0^{+\infty} u^{p/2-1/2} e^{-u}\, dx = \dfrac{1}{2}\, n^{(p+1)/2}\, \Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right)$.

Remarque : On pourrait calculer la valeur de J en utilisant la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

On se ramène en effet à $\Gamma(1) = 1$ (si p impair) et à $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (si p pair).

5) a) En 0^+, on a $t^{x-1}\omega(t) \sim t^{x-1}\omega(0)$, donc $I(x)$ existe ssi $x-1>-1$, c'est-à-dire $x>0$.

b) Par l'inégalité des accroissements finis, on a : $|\omega(t)-\omega(0)| \leq Mt$.

D'où $\left|\int_0^1 t^{x-1}\, \omega(t) - \omega(0)\, dt\right| \leq \int_0^1 t^{x-1}\, |\omega(t)-\omega(0)|\, dt \leq M \int_0^1 t^x\, dt = \dfrac{M}{x+1} = O(1)$ en $x = 0^+$.

On en déduit $I(x) - \omega(0) \int_0^1 t^{x-1}\, dt = O(1)$.

D'où $I(x) - \dfrac{\omega(0)}{x} = O(1)$, donc a fortiori $I(x) \sim \dfrac{\omega(0)}{x}$ lorsque x tend vers 0^+.

6) a) Posons $f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$. On a $f(t) \sim t^{x-1}$ en $t=0$ et $f(t) \sim (1-t)^{y-1}$.

D'où la CNS : f est intégrable sur $]0,1[$ ssi $x>0$ et $y>0$.

b) On a $B(x,y) = B(y,x)$: par le changement de variable $u = 1-t$, $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = -\int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1}\, du$.

c) Par IPP successives, on a : $B(x,n+1) = \dfrac{n!}{x(x+1)...(x+n-1)} \int_0^1 t^{x+n-1}\, dt = \dfrac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$.

d) On a $J = [\arcsin(t)]_{-1}^{1} = \pi$.

On a $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = \int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{t-t^2}} = \int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{1/4-(t-1/2)^2}} = \int_0^1 \dfrac{2\ dt}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \int_0^1 \dfrac{d(2t-1)}{\sqrt{1-(2t-1)^2}}$.

L'application $t \longmapsto u = (2t-1)$ est une bijection affine de $[0,1]$ sur $[-1,1]$.

On a ainsi $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{1} \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = J = \pi$.

7) On a $\int_0^x f(t)\cos(\lambda t)\ dt = \dfrac{1}{\lambda}[f(t)\sin(\lambda t)]_0^x - \dfrac{1}{\lambda}\int_0^x f'(t)\sin(\lambda t)\ dt$.

Le terme $\dfrac{1}{\lambda}[f(t)\sin(\lambda t)]_0^x = \dfrac{1}{\lambda}f(x)\sin(\lambda x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

La fonction f' est intégrable, car $\int_0^x |f'(t)|\ dt = -\int_0^x f'(t)\ dt = f(0) - f(x) \to f(0)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

D'où l'existence de $J(\lambda)$, et on a aussi $J(\lambda) = -\dfrac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} f'(t)\sin(\lambda t)\ dt$.

Donc $|J(\lambda)| \leq \dfrac{K}{\lambda}$, avec $K = \int_0^{+\infty} |f'(t)|\ dt = f(0)$.

8) On a $\int_0^x (f(t+1)-f(t))\ dt = \int_1^{x+1} f(t)\ dt - \int_0^x f(t)\ dt = \int_x^{x+1} f(t)\ dt - \int_0^1 f(t)\ dt$.

Or, en posant $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\int_x^{x+1} f(t)\ dt$ converge vers L lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour x assez grand, $L-\varepsilon \leq f(t) \leq L+\varepsilon$ pour tout $t \in [x, x+1]$.

D'où $L - \varepsilon \leq \int_x^{x+1} f(t)\ dt \leq L + \varepsilon$ pour x assez grand.

Donc $\int_0^{+\infty}(f(t+1)-f(t))\ dt$ converge vers $L - \int_0^1 f(t)\ dt$.

9) a) Soit $p \in \mathbb{N}$.

Par une IPP, $\left|\int_0^{p\pi} \cos(nt)f(t)\ dt\right| = \dfrac{1}{n}\left|\int_0^{p\pi} \sin(nt)f'(t)\ dt\right|$. Donc $|J(n)| \leq \dfrac{1}{n}\int_0^{p\pi} |f'(t)|\ dt + \int_{p\pi}^{+\infty} |f(t)|\ dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\int_{p\pi}^{+\infty} |f(t)|\ dt \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, car f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Et pour n assez grand, $\dfrac{1}{n}\int_0^{p\pi} |f'(t)|\ dt \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc $|J(n)| \leq \varepsilon$. D'où on déduit $\lim_{n\to+\infty} J(n) = 0$.

b) *Remarque* : En fait, a) reste vraie si on suppose f continue par morceaux (au lieu de f de classe C^1).

Contre-exemple : On considère f définie par morceaux :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [(p-1)\pi, p\pi], \qquad f(t) = \cos(pt)$$

On a $\int_{(p-1)\pi}^{x} \cos(pt)\ dt = \dfrac{1}{p}\sin(px)$. En particulier, $\int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \cos(pt)\ dt = 0$.

Donc la primitive $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$ verifie $F(p\pi) = 0$ et $\sup_{[(p-1)\pi,p\pi]} |F| \leq \dfrac{\pi}{p}$. Donc $\lim_{+\infty} F = 0$.

Mais $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \cos(nt)f(t)\ dt = \dfrac{\pi}{2}$.

car $\int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \cos(nt)\cos(pt)\ dt = \dfrac{1}{2}\int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \cos((n+p)t) + \cos(n-p)t)\ dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq p \\ \pi/2 \text{ si } n = p \end{cases}$