Interrogation n°4. *Barème sur 24.5 pts. Durée 1h15*

1) [3.5 pts] Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^x (t-1)^y}$.

Déterminer une CNS sur x et y pour que converge l'intégrale $J = \int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.

2) [2 pts] Déterminer la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{\ln t}{1+t}\right)^2 \, dt$.

3) a) [1.5 pt] Soit $0 < \alpha < 2$. Montrer que $J = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$ existe.

b) [2 pts] En déduire *avec soin* que $K = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ existe, et exprimer sa valeur en fonction de J.

4) [2 pts] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. On considère l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} t^p \exp\left(-\dfrac{t^2}{n}\right) \, dt$.

On rappelle que $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$. Exprimer J en fonction de Γ, de n et de p.

Remarque : On précisera explicitement le changement de variable $t = \varphi(u)$ utilisé, en précisant les propriétés de φ qui justifient la validité de ce changement de variable.

5) Soit $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1, avec $\omega(0) \neq 0$. On pose $M = \sup_{[0,1]} |f'|$.

a) [1.5 pt] Déterminer une CNS sur x pour qu'existe l'intégrale $I(x) = \int_0^1 t^{x-1} \omega(t)\, dt$.

b) [2 pts] En majorant $\left| \int_0^1 t^{x-1}(\omega(t) - \omega(0)) \, dt \right|$, montrer que $I(x) \sim \dfrac{\omega(0)}{x}$ lorsque x tend vers 0^+.

6) On considère $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, dt$.

a) [1 pt] Donner une CNS sur x et y pour que $B(x, y)$ existe. Justifier *brièvement* votre réponse.

On suppose dans la suite ces conditions vérifiées. Les questions b), c) et d) sont indépendantes.

b) [0.5 pt] Comparer $B(x, y)$ et $B(y, x)$ et justifier en donnant *sans détailler* l'argument essentiel.

c) [1.5 pt] Donner *sans justification* la valeur de $B(x, n+1)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (et tout réel x valide).

d) [2 pts] Que vaut $J = \int_{-1}^1 \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$? En déduire la valeur de $B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Indication : Utiliser une bijection affine $\varphi : t \longmapsto u$ de $[0,1]$ sur $[-1,1]$.

7) [2 pts] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1, décroissante, positive et convergeant vers 0 en $+\infty$.

Justifier pour tout $\lambda > 0$ l'existence de $J(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) \, dt$ et montrer que $|J(\lambda)| \leq \dfrac{f(0)}{\lambda}$.

8) [2 pts] (★) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et convergeant en $+\infty$ vers un réel L.

Montrer que $\int_0^{+\infty} (f(t+1) - f(t)) \, dt$ converge.

9) a) [1.5 pt] (★) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable et de classe C^1.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J(n) = \int_0^{+\infty} \cos(nt) f(t) \, dt$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} J(n) = 0$.

b) (★★) [*Question hors-interrogation*]

Montrer que la propriété est fausse si on suppose seulement $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ semi-convergente.