Interrogation n°3. Corrigé

1) On a $\operatorname{ch}(2x) = 1 + \dfrac{(2x)^2}{2} + \dfrac{(2x)^4}{24} + \mathfrak{o}\left(x^4\right) = 1 + 2x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \mathfrak{o}\left(x^4\right)$.

Or, on a $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 - \dfrac{1}{2}u + \dfrac{3}{8}u^2 + \mathfrak{o}\left(u^2\right)$.

Avec $u = 2x^2 + \dfrac{1}{3}x^4 + \mathfrak{o}\left(x^4\right)$, on a $\mathfrak{o}\left(u^2\right) = \mathfrak{o}\left(x^4\right)$, d'où on obtient :

$f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(2x^2 + \dfrac{2}{3}x^4\right) + \dfrac{3}{8}(2x^2)^2 + \mathfrak{o}\left(x^4\right) = 1 - x^2 + \left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2}\right)x^4 + \mathfrak{o}\left(x^4\right) = 1 - x^2 + \dfrac{7}{6}x^4 + \mathfrak{o}\left(x^4\right)$.

2) a) On a $\dfrac{n+1}{n-1} = \dfrac{1+1/n}{1-1/n} = 1 + \dfrac{2}{n} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Or, $(1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u$, donc $u_n \sim \dfrac{2\alpha}{n}$.

b) Avec $h = \dfrac{1}{x}$, on a $\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+2h} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

D'autre part, sans calcul, on a $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{1}{x^2} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, car $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)} \sim \dfrac{1}{x^2}$.

D'où $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

c) On a $\tan(\frac{\pi}{4} + h) = 1 + 2h + \mathfrak{o}\left(h\right)$ par Taylor-Young, car $\tan' \frac{\pi}{4} = 1 + \left(\tan \frac{\pi}{4}\right)^2 = 2$.

D'où $v_n = \exp((\ln n)(1 + \frac{2}{n} + \mathfrak{o}_{+\infty}(\frac{1}{n})) = n \exp(\frac{2 \ln n}{n} + \mathfrak{o}_{+\infty}(\frac{\ln n}{n}))$.

On a $\frac{\ln n}{n} \to 1$, donc on peut utiliser $\exp(u + \mathfrak{o}\left(u\right)) = 1 + u + \mathfrak{o}\left(u\right)$.

Donc $v_n = n(1 + \frac{2\ln n}{n} + \mathfrak{o}_{+\infty}(\frac{\ln n}{n}))$, d'où on en déduit $v_n = n + 2\ln n + \mathfrak{o}_{+\infty}(\ln n)$.

3) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $x + y + z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, donc A est majoré par $\sqrt{3}$.

En considérant $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, on a $\sqrt{3} \in A$. Donc $\sqrt{3} = \max A = \sup A$.

On a $(x + y + z)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2$, donc A est minoré par 1. D'autre part, $1 = \lim_{x \to +\infty}(x, 1, 1)$. D'où $\beta = 1$.

4) On a $E(e^{\lambda X}) = qe^{\lambda 0} + pe^{\lambda 1}$. L'application $f : x \longmapsto e^{\lambda x}$ est convexe car $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \geq 0$.

Donc $f(q.0 + p.1) \leq qf(0) + pf(1)$, c'est-à-dire $e^{\lambda p} \leq E(e^{\lambda X})$.

Remarque : De façon générale, pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour toute v.a. réelle X, on peut montrer l'inégalité de Jensen : $f(E(X)) \leq E(f(X))$.

5) Posons $L = f'(0)$. Comme $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = L$, alors tout choix $a < L < b$ convient.

6) a) Posons $g(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)}$. On a $\dfrac{1}{\ln(1+x)} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{-1} = \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right)\right)^{-1}$.

Comme $(1-u)^{-1} = 1 + u + u^2 + \mathfrak{o}\left(u\right)$, alors $g(x) = \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{4}x^2 + \mathfrak{o}(x^2)\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{12}x + \mathfrak{o}\left(x\right)$.

Donc $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{12}x + \mathfrak{o}\left(x\right)$, donc f se prolonge par continuité en 0, et on a alors $f'(0) = -\dfrac{1}{12}$.

b) Considérons $\varphi(x) = \int_x^{2x} \dfrac{1}{\ln(1+t)}\, dt$. L'idée est d'approcher $\dfrac{1}{\ln(1+t)}$ par $\dfrac{1}{t}$ qu'on sait intégrer.

On a en effet $\varphi(x) = \int_x^{2x} \dfrac{1}{t}\, dt + \int_x^{2x} f(t)\, dt = \ln 2 + F(2x) - F(x)$.

Et par intégration du DL de f, on a $F(x) = \dfrac{1}{2}x + \mathfrak{o}\left(x\right)$.

Donc $\varphi(x) = \ln 2 + (2-1)\dfrac{1}{2}x + \mathfrak{o}\,(x) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}x + \mathfrak{o}\,(x)$.

7) a) Soit $M \geq 0$. Pour n assez grand, on a $f_n(M) < 0 = f_n(x_n)$, donc $M < x_n$, ce qui prouve le résultat.

Remarque : Une autre méthode consiste à utiliser $x_n = \varphi^{-1}(n)$, où $\varphi : x \longmapsto x + \ln x$ bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. En effet, φ^{-1} est croissante (car φ l'est), donc $\lim_{+\infty} \varphi^{-1} = +\infty$. D'où $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

b) On a $\ln u = \mathfrak{o}_{+\infty}(u)$, donc $x_n + \ln x_n \sim x_n$, donc $x_n \sim n$.

Et $x_n = n + \ln x_n = n - \ln(n + \mathfrak{o}\,(n)) = n - \ln n - \ln(1 + \mathfrak{o}\,(1)) = n - \ln n + \mathfrak{o}_{+\infty}(1)$.

8) On a $\sin x \sim x$, donc $f(x) \sim x^n$, c'est-à-dire $f(x) = x^n + \mathfrak{o}\,(x^n)$.

Par Taylor-Young (f est C^∞) et par unicité du DL, on a $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$, c'est-à-dire $f^{(n)}(0) = n!$

9) On considère φ définie sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x(1-x)}$.

φ est prolongeable par continuité en 0^+, car $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x(1-x)} = \dfrac{f(x)}{x}\dfrac{1}{1-x} \to f'(0)$ lorsque $x \to 0^+$.

De même, φ est prolongeable par continuité en 1^-, car $\varphi(x) \to -f'(1)$ lorsque $x \to 1^-$.

On pose donc $\varphi(0) = f'(0)$ et $\varphi(1) = -f'(1)$.

La fonction φ obtenue est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée.

10) Posons $g(x) = \ln f(x)$. On a $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = L$.

Donc $\lambda < L < \mu$, alors $\lambda < g'(x) < \mu$ pour $x \geq x_0$ assez grand.

Donc $\lambda(x - x_0) < g(x) - g(a) < \mu(x - x_0)$ pour $x \geq x_0$ assez grand, par intégration des inégalités.

En composant par exp (fonction strictement croissante), on obtient donc bien :

$\forall x \geq x_0,\ ae^{\lambda x} \leq f(x) \leq be^{\mu x}$, avec $a = f(x_0)e^{-\lambda x_0}$ et $b = f(x_0)e^{-\mu x_0}$.

11) a) Il existe $x_0 \in [a,b]$ telle que $f(x_0) = M$.

Par continuité, on a $f(x) \geq M - \varepsilon$ au voisinage de x_0 (relativement à $[a,b]$).

Le voisinage peut être pris de la forme $[x_0 - \frac{1}{2}\alpha, x_0 + \frac{1}{2}\alpha]$ avec $\alpha > 0$, sauf dans le cas où x_0 vaut a ou b.

Dans ce cas, on choisit respectivement $[a, a+\alpha]$ et $[b-\alpha, b]$ avec $\alpha > 0$.

b) On a $I_n = \int_a^b f(x)^n\, dx \leq I_n = \int_a^b M^n\, dx = (b-a)M^n$.

Par Chasles et positivité de f, on a $I_n \geq \int_\Delta f(x)^n\, dx \geq \alpha(M-\varepsilon)^n$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Par a) et b), il existe α tel que $\alpha^{1/n}(M-\varepsilon) \leq u_n \leq (b-a)^{1/n}M$.

On a $\lim_{n\to+\infty} \alpha^{1/n}(M-\varepsilon) = (M-\varepsilon)$ et $\lim_{n\to+\infty}(b-a)^{1/n}M = M$.

Donc pour n assez grand, $(M-2\varepsilon) \leq u_n \leq (M+\varepsilon)$. Comme ε est arbitraire, $\lim_{n\to+\infty} u_n = M$.