Interrogation n°3. *Barème sur 24.5 pts. Durée 1h15*

1) [2.5 pts] Déterminer le $DL_4(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2x)}}$.

2) [3.5 pts] *Les trois questions sont indépendantes.*

a) Soit $\alpha > 0$. On pose

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\alpha} - 1$$

Donner *sans justification* un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer le DL à l'ordre 2 lorsque x tend vers $+\infty$ de $g(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$.

c) On considère $\omega_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{n}\right)$ et $v_n = n^{\omega_n}$.

Montrer que $\omega_n = 1 + \dfrac{2}{n} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et en déduire $v_n = n + 2\ln n + \mathfrak{o}_{+\infty}(\ln n)$.

3) [2.5 pts] On pose

$$A = \left\{ \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ (x,y,z) \in]0,+\infty[^3 \right\}$$

Déterminer $\sup A$, et montrer que $\inf A = 1$.

4) [2 pts] Soit X une v.a. de loi de Bernoulli, c'est-à-dire $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p = q$.

Montrer que pour tout réel λ, on a

$$E(e^{\lambda X}) \geq e^{\lambda p}$$

5) [1 pt] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

Indiquer *sans justification* pour quelles valeurs de a et b on a toujours $ax \leq f(x) \leq bx$ au voisinage de 0^+.

Remarque : Le terme "toujours" signifie que la propriété est vraie pour toute fonction f vérifiant les hypothèses.

6) On pose $\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ et $\forall x > 0,$ $\boxed{f(x) = g(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}}$.

a) [2 pts] Montrer que f peut se prolonger en 0 par une fonction qui est dérivable en 0.

b) [2 pts] On pose $\forall x > 0,$ $\boxed{\varphi(x) = \int_x^{2x} g(t)\, dt.}$ Déterminer le $DL_1(0)$ de $\varphi(x)$.

Indication : Utiliser le $DL_1(0)$ de $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ (sans chercher à calculer F).

7) On *admet* que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \geq 1$ vérifiant l'équation

$$(E_n) : x + \ln x = n$$

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction strictement croissante $\forall x \geq 1, \;\; f_n(x) = x + \ln x - n$.

a) [1 pt] Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. *Suggestion* : Pour M fixé, considérer le signe de $f_n(M)$.

b) [2 pts] Déterminer un équivalent de x_n, puis un DA à *deux* termes de x_n.

8) [1 pt] On considère $f(x) = (\sin x)^n$. On sait que f est de classe C^∞.

En utilisant le $DL_n(0)$ de $f(x)$, déterminer (sans calcul !) la valeur de $f^{(n)}(0)$.

9) [1.5 pt] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$.

Montrer qu'il existe un réel k tel que $\boxed{\forall x \in [0,1], \;\; |f(x)| \leq kx(1-x).}$

Indication : Considérer la fonction $\varphi : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x(1-x)}$ définie sur $]0,1[$.

10) [1.5 pt] Soit $f : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une application de classe C^1 telle que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = L}$, où $L \in \mathbb{R}$.

Soient λ et μ réels vérifiant $\lambda < L < \mu$.

Montrer qu'il existe a et b tels que $ae^{\lambda x} \leq f(x) \leq be^{\mu x}$ pour x assez grand.

11) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive, avec $a < b$. On pose $M = \sup f$.

a) [0.5 pt] Soit $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe un intervalle $\Delta \subset [a,b]$ de longueur $\alpha > 0$ telle que $\forall x \in \Delta, \; f(x) \geq M - \varepsilon$.

b) [0.5 pt] On pose $I_n = \int_a^b f(x)^n \, dx$. Avec les notations de a), montrer que $\alpha(M-\varepsilon)^n \leq I_n \leq (b-a)M^n$.

c) [1 pt] On pose $u_n = \left(\int_a^b f(x)^n \, dx\right)^{1/n}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$, en justifiant *avec soin* votre réponse.