Interrogation n°2. Corrigé

1) Le réel 0 est le seul point en lequel f est continue.

- On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq |x|$, donc par pincement, la fonction f est bien continue en 0.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Supposons par l'absurde f continue en x. On sait que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
Il existe donc une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$. Alors $x = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = x$.
Et une suite d'irrationnels $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} s_n = x$. Alors $x = \lim_{n\to+\infty} f(s_n) = 0$.
D'où une contradiction, car $x \neq 0$.

2) a) On prend $r_n = \dfrac{k_n}{n}$, où $k_n = 1 + \lfloor nx \rfloor$. On a $r_n - \dfrac{1}{n} \leq x < r_n$, donc $\lim_{n\to+\infty} r_n = x^+$.

b) $\sqrt{2}$ est par définition un minorant de A, et par a), $\sqrt{2}$ est adhérent à A. Donc $\alpha = \sqrt{2}$.

3) a) Soit $\lambda \in [0,1]$. On a $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}$ et on a $0 \leq \lfloor 2^n \lambda \rfloor \leq 2^n$, donc $\lambda \in \overline{A}$.
D'autre part, $A \subset [0,1]$, donc $\overline{A} \subset [0,1]$ par passage à la limite des inégalités larges.

b) On fixe x et y. On pose $A = \{\lambda \in [0,1] \mid f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\}$.

- Montrons que A vérifie les propriétés du a) : On a bien 0 et $1 \in A$, car $f(x) \leq f(x)$ et $f(y) \leq f(y)$.
Soient $\lambda \in A$ et $\mu \in A$. Posons $m = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)$.
Alors $z = mx + (1-m)y = \frac{1}{2}(\lambda x + (1-\lambda)y) + \frac{1}{2}(\mu x + (1-\mu)y)$.
On en déduit que $f(z) \leq \frac{1}{2}(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) + \frac{1}{2}(\mu x + (1-\mu)y) = mf(x) + (1-m)f(y)$.
Donc $m \in A$.

- Par a), A est dense dans $[0,1]$.

On utilise pour conclure la continuité de f : Si $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \in A$, alors :
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lim_{n\to+\infty} f(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) \leq \lim_{n\to+\infty} \lambda_n f(x) + (1-\lambda)f_n(y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

4) a) $A_p(n) = \sum_{k=0}^{p} \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ est un **polynôme** en n de degré p.

Par croissances comparées, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{A_p(n)}{2^n} = 0$.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc est bornée. On pose $M = \sup |u_n|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang p tel que $\forall k \geq p$, $|u_k| \leq \varepsilon$.
Pour $n \geq p$, on a $|\omega_n| \leq \dfrac{\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} M}{2^n} + \dfrac{\sum_{k=p+1}^{p} \binom{n}{k} \varepsilon}{2^n} \leq \dfrac{A_p(n)}{2^n} M + \varepsilon$, car $\sum_{k=p+1}^{p} \binom{n}{k} \leq 2^n$.
Par a), pour n assez grand, on a $\dfrac{A_p(n)}{2^n} M \leq \varepsilon$ pour n assez grand, d'où on obtient $|\omega_n| \leq 2\varepsilon$.
Comme 2ε peut être choisi arbitrairement petit, on en conclut $\lim_{n\to+\infty} \omega_n = 0$.

5) *Remarque* : De façon pragmatique, on peut se douter que l'équivalent est celui obtenu lorsqu'on prend pour $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante de valeur L, et on obtient alors une somme géométrique $S_n = L\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1} \sim \dfrac{aL}{a-1}\, a^n$.

Interprétation du phénomène : $\dfrac{S_n}{\sum_{k=0}^{n} a^k}$ est la valeur moyenne de ω_k pondérés par a^k, pour $0 \leq k \leq n$.
Comme $a \geq 1$, le poids porte asymptotiquement principalement sur les termes d'indices "grands".
Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\sum_{k=0}^{n} a^k} = L$, d'où $S_n \sim \dfrac{a^{n+1}}{a-1} L$ dans le cas où $L > 0$, et $S_n = \mathfrak{o}(a^n)$ si $L = 0$.
Remarque : La démonstration se fait par une preuve de type Cesàro (en se ramenant au cas $L = 0$) :
On prouve d'abord que si $L = 0$, alors $S_n = \mathfrak{o}(a^n)$. On se ramène ensuite à ce cas en écrivant $u_n = L + \omega_n$.

6) a) A est non vide (car $0 \in A$) et est majoré par 1, d'où l'existence de α.

b) - Supposons $f(\alpha) \neq 0$. Par continuité, $f(t) \neq 0$ au voisinage de α.

Or, ce voisinage contient nécessairement un élément $a \in A$, car α est adhérent à A.

Comme f admet un nombre fini de zéros sur $[0, a]$ et ne s'annule pas sur $[a, \alpha]$, alors $\alpha \in A$.

- Supposons $f(\alpha) = 0$. On fait le même raisonnement, mais avec un voisinage contenant α comme seul zéro. Donc on obtient aussi $\alpha \in A$.

c) Supposons par l'absurde $\alpha < 1$.

Alors, sur un intervalle $[\alpha, \alpha + \varepsilon]$, où $\varepsilon > 0$, f admet ou bien aucun zéro ou bien α comme seul zéro

Comme $\alpha \in A$, le segment $[0, \alpha]$ contient un nombre fini de zéros.

Donc $[0, \alpha + \varepsilon]$ admet aussi un nombre fini de zéros.

On en conclut $\alpha + \varepsilon \in A$, ce qui contredit la définition de α. Donc $\alpha = 1$.

7) Soit $a \in A$. Posons $b = f(a) \in B$.

Comme B est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[b - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset B$.

Comme f est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que $f([a - \alpha, a + \alpha]) \subset [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$.

Donc $[a - \alpha, a + \alpha] \in f^{-1}(B) = A$. Donc A est ouvert.

Autre preuve : On a aussi $\mathbb{R} \setminus A = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B)$.

Il suffit donc de prouver que l'image réciproque d'un fermé est un fermé.

Pour alléger les notations, supposons désormais B fermé. Montrons que $A = f^{-1}(B)$ est fermé.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $A = f^{-1}(B)$ convergeant vers a.

On a $f(a) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \in \overline{B} = B$, donc $a \in A$, ce qui permet de conclure.

8) a) On a $f(a) \leq g(a) + |f(a) - g(a)| \leq \sup g + M$, donc $\sup f \leq \sup g + M$.

De même, $\sup g \leq \sup f + M$. D'où $|\sup f - \sup g| \leq M$.

On a $\inf f = -\sup(-f)$.

En appliquant ce qui précède à $(-f)$ et $(-g)$ qui vérifient la même hypothèse, on a donc $|\sup f - \sup g| \leq M$.

b) On fixe x et y, et on applique a) aux fonctions $f : A \to \mathbb{R} \quad a \longmapsto |x - a|$ et $g : A \to \mathbb{R} \quad a \longmapsto |y - a|$.

On a bien $|f(a) - g(a)| \leq ||x - a| - |y - a|| \leq |x - y|$ par la seconde inégalité triangulaire.

On a $d(x, A) = \inf f$ et $d(y, A) = \inf g$, donc on déduit de a) que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.

c) On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto d(x, A)$. Par b), f est continue car lipschitzienne.

D'autre part, $f(x) = 0$ ssi $d(x, A) = 0$, c'est-à-dire ssi $x \in \overline{A} = A$. D'où le résultat.

9) a) Supposons $0 < c \leq \dfrac{1}{2}$. On a $f(c) \leq \dfrac{f(0) + f(2c)}{2} = \dfrac{f(2c)}{2}$, donc $f(2c) \geq 2f(c)$.

Supposons $\dfrac{1}{2} \leq c \leq 1$. On prend d tel que $\dfrac{d + 1}{2} = c$, c'est-à-dire $d = 2c - 1$.

On a bien $0 \leq d \leq 1$ et $f(c) \leq \dfrac{f(d) + f(1)}{2}$, d'où on déduit bien $f(d) \geq 2f(c)$, car $f(1) = 0$.

Posons $M = \sup f$. Supposons par l'absurde $M > 0$. Par Weierstrass, il existe c tel que $f(c) = M$.

Et il existe donc d tel que $f(d) \geq 2M$, ce qui est absurde. Donc $M = 0$, et ainsi $f \leq 0$.

b) On considère L la droite d'interpolation de f en 0 et 1.

L'application $g = f - L$ vérifie aussi $g\left(\dfrac{x + y}{2}\right) \leq \dfrac{g(x) + g(y)}{2}$, car il y a égalité pour L.

Par a), $g \leq .0$, c'est-à-dire $f \leq L$.