Interrogation n°2. *Barème sur 23 pts. Durée 1h10*

Toute propriété vue en cours peut être utilisée sans justification.

1) [2 pts] On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

En justifiant votre réponse, déterminer *tous* les réels en lesquels f est continue.

2) a) [1 pt] Soit $x \in \mathbb{R}$.

Expliciter *sans justification* une suite de rationnels $(r)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} r_n = x \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n > x \end{cases}$

b) [1.5 pt] On pose $A = \left\{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq \sqrt{2}\right\}$. Que vaut $\alpha = \inf A$? Justifier votre réponse.

3) a) [2 pts] Soit A une partie de $[0,1]$ vérifiant

$$0 \in A \quad \text{et} \quad 1 \in A \quad \text{et} \quad \forall (a,b) \in A^2,\ \frac{a+b}{2} \in A$$

On vérifie aisément (*admis ici*) que

$$A = \left\{\frac{k}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k \leq 2^n\right\}$$

Autrement dit, A est l'ensemble des réels $\lambda \in [0,1]$ de la forme $\frac{k}{2^n}$, où n et k entiers.

Montrer que $\overline{A} = [0,1]$.

b) *Question hors-interrogation.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Justifier que f est convexe.

4) a) [1.5 pt] Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $A_p(n) = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{A_p(n)}{2^n} = 0$.

Suggestion : Si nécessaire, traiter d'abord le cas $p = 2$ pour comprendre l'argument à utiliser.

b) [3 pts] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k}{2^n}$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \omega_n = 0$.

5) [1 pt] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et un réel $a > 1$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k u_k$.

On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = L > 0$. Donner *sans justification* un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On note Δ l'ensemble des zéros de f. On suppose que **tous les zéros de f sont isolés** :

Pour tout $x \in \Delta$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap [0,1], \quad t \neq x \Rightarrow f(t) \neq 0$.

Autrement dit, pour tout zéro x de f, il existe un voisinage de x où f admet x comme *seul* zéro.

On se propose de prouver que f admet un nombre *fini* de zéros.

On pose $A = \{a \in [0,1] \mid f \text{ admet un nombre fini de zéros sur } [0,a]\}$.

a) [0.5 pt] Montrer l'existence de $\alpha = \sup A$.

b) [2 pts] Montrer que $\alpha \in A$.

c) [1 pt] Montrer que $\alpha = 1$.

7) [2 pts] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit B une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

On pose $A = f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\}$. Montrer que $A = f^{-1}(B)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

Indication : On fixe $a \in A$. Poser $b = f(a) \in B$ et utiliser les définitions de B ouvert et de f continue.

Autre méthode : Se ramener au cas des parties fermées.

8) a) [2 pts] Soient f et $g : A \to \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe un réel M tel que $\forall a \in A$, $|f(a) - g(a)| \leq M$.

Montrer que $|\sup f - \sup g| \leq M$, et en déduire $|\inf f - \inf g| \leq M$.

b) [1 pt] Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose $d(x,A) = \inf\{|x-a|,\, a \in A\}$.

Déduire de a) que l'application $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne.

c) [0.5 pt] On considère une partie fermée A de $\mathbb{R}$.

Expliciter une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont A est l'ensemble des zéros.

9) *On propose une autre preuve de 3) b).*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

a) [1.5 pt] On suppose de plus $f(0) = f(1) = 0$.

Soit $c \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) \geq 2f(c)$. En déduire que $\sup_{[0,1]} f = 0$.

b) [0.5 pt] Dans le cas général, montrer que le graphe de f est au-dessous de sa corde sur $[0,1]$.