Interrogation n°1. Corrigé

1) Les racines complexes de $P(X)$ sont les $ae^{i\pi/4}$ et $ae^{3i\pi/4}$, et leurs conjugués.

Comme P est unitaire, on obtient $P(X) = \left(X^2 + 2a\cos(\frac{\pi}{4})X + a^2\right)\left(X^2 + 2a\cos(\frac{3\pi}{4})X + a^2\right)$,

c'est-à-dire $P(X) = (X^2 + a\sqrt{2}X + a^2)(X^2 - a\sqrt{2}X + a^2)$.

2) a) On considère l'application linéaire $u : \mathbb{C}_3[X] \to \mathbb{C}^4 \quad P \longmapsto (P(a), P'(a), P(b), P(c))$.

Si $P \in \operatorname{Ker} u$, alors a, b, c sont racines de P, avec a racine au moins double.

Donc P admet au moins 4 racines comptées avec multiplicité. Comme $\deg P \leq 3$, alors $P = 0$.

Donc u est injective. Comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4$, alors u est bijective. D'où le résultat.

b) R admet a comme racine d'ordre ≥ 2 et b comme racine.

Donc R est de la forme $R(X) = \lambda(X-a)^2(X-b)$. On a $R(c) = 1$, donc $R(X) = \dfrac{(X-a)^2(X-b)}{(c-a)^2(c-b)}$.

c) On prend ici $u : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}^4$. On a $P \in \operatorname{Ker} u$ ssi M divise P, où $M(X) = (X-a)^2(X-b)(X-c)$

On a $u(P) = (0,0,0,1)$ ssi $u(P) = u(R)$ donc (par linéarité de u) ssi $P \in R + \operatorname{Ker} u$.

Les solutions sont donc les $P(X) = R(X) + M(X)Q(X)$, où $Q \in \mathbb{C}[X]$.

3) a) On a $F(x) = (1+x)^n + (1-x)^n = 2\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} x^k$.

Donc $2S = F(1)$ et $2T = F'(1)$, d'où $S = 2^{n-1}$ (car $n \geq 1$) et $T = n2^{n-2}$ si $n \geq 2$ (et 0 si $n = 1$).

b) $m = \dfrac{T}{S} = \dfrac{n}{2}$ si $n \geq 2$ (et 0 si $n = 1$).

4) Posons $Q(X) = 1 + X + ... + X^{2024} = \dfrac{X^{2025} - 1}{X - 1}$.

Les racines de Q sont donc **simples** (ce sont les nombres complexes appartenant à $U_{2025} \setminus \{1\}$).

Or, les racines de $P(X)^2$ sont nécessairement d'ordre pair car $P(X) = \lambda^2 \prod_{i=1}^{r}(X - z_i)^{2m_i}$.

D'où une contradiction.

5) a) (i) Posons $a_k = P(k)$, avec $0 \leq k \leq n = \deg P$.

Donc P est son propre polynôme d'interpolation en les points (k, a_k).

Donc P est à coefficients réels (car les a_k et les k le sont, et par la formule de l'interpolation).

(ii) On a $\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\overline{P}(x) = P(x) \in \mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{R}$ infini, P et $\overline{P}$ sont égaux, c'est-à-dire P réel.

b) Par (a), on prend P polynôme réel. Par le TVI, $P(\mathbb{R})$ est un intervalle.

On a $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ssi P non majorée et non minorée, donc ssi P est de degré impair.

c) Par (a), on prend P polynôme réel. CNS : Le coefficient dominant λ est > 0, et P admet au moins une racine réelle, et toutes les racines réelles sont d'ordre pair.

6) En fait, la propriété est vraie pour tout polynôme : Il existe L polynôme de degré ≤ 1 tel que

$$P(0) = L(0),\ P(1) = L(1),\ P'(0) = L'(0) \text{ et } P'(1) = L'(1)$$

Posons $Q = P - L$. Comme $\deg L \leq 1$, on a $Q'' = P''$.

Or, $Q(0) = Q(1) = 0$, donc par Rolle, Q' s'annule sur $]0,1[$.

Mais on a aussi $Q'(0) = Q'(1) = 0$. Donc Q' s'annule en trois points sur $[0,1]$.

Donc par Rolle Q'' s'annule au moins deux fois sur $]0,1[$.

Remarque : Si on exploite $\deg P = 4$, on a : $Q = P - L = \lambda X^2(X-1)^2$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Donc $P(X) = \lambda(X^4 - 2X^3 + X^2) + L(X)$, donc $P''(X) = 12\lambda(X^2 - X + \frac{1}{6})$.

Donc les racines de P'' sont $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1/3})$ et appartiennent bien à $]0,1[$.

7) On a $P(X) = nX^{n-1} + ...$, donc $\deg P = n-1$.

On résout : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P(z) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z+1}{z}\right)^n = 1$. Or, pour $e^{i\theta} \neq 1$, $\dfrac{z+1}{z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{e^{i\theta} - 1}$.

On en déduit que les $(n-1)$ racines de l'unité distinctes de 1 sont racines de P.

D'où on déduit par degré : $P(X) = n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \dfrac{1}{\omega^k - 1}\right)$.

8) a) $S_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \exp(ik\theta) = e^{-in\theta}\sum_{k=-n}^{n}(e^{i\theta})^k = e^{-in\theta}\dfrac{e^{i(2n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{-in\theta}\dfrac{e^{i(2n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\dfrac{\sin((2n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$.

D'où le résultat. On prolonge f par continuité en $\theta = 0\ [2\pi]$, en prenant $f(0) = S_n(0) = 2n+1$.

b) $I_n = \int_0^{2\pi} f(\theta)^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} S_n^2(\theta)\, d\theta$.

En développant $S_n^2(\theta)$, on obtient des termes $e^{i(k+l)\theta}$ dont l'intégrale est nulle sauf si $k + l = 0$.

On obtient donc $(2n+1)$ termes dont l'intégrale n'est pas nulle (pour chaque k, on choisit $l = -k$).

Donc $\int_0^{2\pi} S_n^2(\theta)\, d\theta = (2n+1)\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi\ (2n+1)$.

9) a) Le coefficient dominant λ de R vaut $\lambda = \prod_{k=0}^{n-1}\omega^k = \omega^{n(n-1)/2} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$.

Si $z = 0$, $R(X) = \lambda X^n$.

Supposons $z \neq 0$. Les racines de R sont les $z\omega^{-k}$, c'est-à-dire les racines n-ième de z^n.

Donc $R = \lambda(X^n - z^n)$.

Remarque : Au lieu d'utiliser le coefficient dominant, on peut utiliser le coefficients constant :

On a $R(X) = \lambda(X^n - z^n) = \prod_{k=0}^{n-1}(X\omega - z)$, donc $-\lambda z^n = R(0) = (-1)^{n-1}z^n$, c'est-à-dire $\lambda = (-1)^{n-1}$.

b) Posons $P(X) = (X - z_1)...(X - z_d)$.

Alors par a) et par Fubini (pour les produits), $\prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k X) = \prod_{j=0}^{d}\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^k X - z_j)$.

Donc on obtient $(-1)^{d(n-1)}\prod_{j=1}^{d}(X^n - z_j^n) = Q(X^n)$, avec $Q(Y) = (-1)^{d(n-1)}\prod_{j=1}^{d}(Y - z_j^n)$.

Remarque : Par exemple, pour $n = 2$, $P(X)P(-X)$ est de la forme $Q(X^2)$.

10) a) Supposons (i).

On a $P = Q$, donc les racines de P sont donc globalement invariantes par $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$.

On peut donc grouper les racines distinctes de 1 et -1 en associant z et $\dfrac{1}{z}$ (avec multiplicité).

On a $(X - z)(X - 1/z) = X^2 - \alpha X + 1$, où $\alpha = z + 1/z$.

Donc $P(X)$ est de la forme $P(X) = (X-1)(X+1)^b \prod_{k-1}^{r}(X^2 - \alpha_k X + 1)$, avec α de la forme $z + 1/z$.

Comme $a_0 = a_n = 1$, alors $P(0) = 1$, donc a est pair. Comme $n = \deg P$ est pair, alors b est pair.

Or, $(X-1)^2 = (X^2 - 2X + 1)$ et $(X+1)^2 = (X^2 + 2X + 1)$. D'où (ii).

Supposons (ii) Les racines λ et μ de $(X^2 - \alpha X + 1)$ vérifient $\lambda\mu = 1$.

Donc les racines de P sont globalement invariante par $z \longmapsto 1/z$ (avec multiplicité)

Donc P et Q sont proportionnels (ils ont les mêmes racines).

Comme $a_0 = a_n = 1$, alors $P = Q$. D'où (i).

b) Par a), $R(X)$ s'écrit sous la forme $(X^2 + \alpha X + 1)(X^2 + \beta X + 1)$.
On obtient alors en développant $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta + 2 = 3 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$.
On obtient donc $R(X) = (X^2 + X + 1)^2$ décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Autre preuve : On a $\dfrac{P(x)}{x^2} = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 3$.

Or, $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$. Donc $\dfrac{P(x)}{x^2} = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2$, où $\boxed{y = x + \dfrac{1}{x}}$.

Les racines complexes de P sont donc j et j^2 d'ordre 2 (ce sont racines de l'équation $x + \dfrac{1}{x} = -1$)