Interrogation n°1. *Barème sur 24 pts. Durée 1h20*

1) [2 pts] Soit un réel $a > 0$. *Sans justification*, factoriser $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}[X]}$ le polynôme $P(X) = X^4 + a^4$.

2) Soient a, b et c trois nombres complexes distincts.

a) [1.5 pt] Montrer que pour tout $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) \in \mathbb{C}^4$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_3[X]$ tel que

$$(P(a), P'(a), P(b), P(c)) = (\alpha, \beta, \delta, \gamma)$$

Indication : Considérer $u : P \longmapsto (P(a), P'(a), P(b), P(c))$.

b) [1 pt] Expliciter le polynôme $R \in \mathbb{C}_3[X]$ tel que $\boxed{R(a) = R'(a) = R(b) = 0 \text{ et } R(c) = 1}$.

c) [1.5 pt] En déduire *tous* les polynômes $P \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ tels que

$$P(a) = P'(a) = P(b) = 0 \text{ et } P(c) = 1$$

3) Soit un entier $n \geq 1$. On considère la fonction polynomiale $F(x) = (1+x)^n + (1-x)^n$.

a) [1.5 pt] En utilisant la fonction F, calculer $\boxed{S = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} \text{ et } T = \sum_{k \text{ pair}} k\binom{n}{k}}$.

b) [0.5 pt] En déduire *sans justification* le cardinal moyen m d'une partie de cardinal pair de $E = \{1, 2, ..., n\}$.

4) [1.5 pt] Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X)^2 = 1 + X + ... + X^{2024}$$

Indication : Considérer l'ordre de multiplicité des racines de $Q(X) = 1 + X + ... + X^{2024}$.

5) [3.5 pts] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe de degré n.

a) On suppose $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(i) En utilisant l'interpolation de Lagrange, montrer que P est à coefficients réels.

(ii) Proposer une autre preuve en sachant que $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$.

b) Donner *sans justification* une condition nécessaire et suffisante pour que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

c) Donner *sans justification* une condition nécessaire et suffisante pour que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

On donnera une condition portant sur le coefficient dominant λ et les racines réelles de P.

6) [2 pts] (*inspiré Oral X 2019*) Soit P un polynôme réel de degré 4.

On suppose que le graphe de P est tangent en les points d'abscisses 0 et 1 à une *même* droite L.

Montrer que P'' admet au moins deux racines sur $]0, 1[$.

Indication : Considérer $Q = P - L$.

7) [1.5 pt] On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = (X+1)^n - X^n$.

8) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad S_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \exp(ik\theta) \quad \text{et} \quad \forall \theta \neq 0\ [2\pi], \quad f(\theta) = \frac{\sin((2n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

a) [1.5 pt] Montrer sans récurrence que $\forall \theta \neq 0\ [2\pi]$, $S_n(\theta) = f(\theta)$.

Comment prolonger la fonction f par continuité en 0 modulo 2π ?

b) [1.5 pt] (★) En déduire la valeur de $I_n = \int_0^{2\pi} f(\theta)^2\, d\theta$.

On rappelle (admis ici) que $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\theta = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ et que $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\theta = 2\pi$ si $k = 0$.

9) On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

a) [1.5 pt] Pour $z \in \mathbb{C}$, calculer $R(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(\omega^k X - z)$.

Indication : Considérer les racines de $R(X)$ ainsi qu'un coefficient bien choisi.

b) [1 pt] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme *unitaire* de degré d. On notera $z_1, ..., z_d$ les racines de P.

En utilisant a), montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(X^n) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k X)$.

10) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n (c'est-à-dire $a_n = 1$) et avec a_0 non nul.

On note $z_1, ..., z_n$ les racines de P, répétées avec multiplicité.

On considère son polynôme miroir $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k = a_n + ... + a_1 X^{n-1} + a_0 X^n$.

On admet que les racines de Q sont les $\dfrac{1}{z_k}$, avec $1 \leq k \leq n$,

a) [2 pts] (★) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) n est pair et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{a_k = a_{n-k}}$, c'est-à-dire $P = Q$ de degré pair.

(ii) Le polynôme P est produit de polynômes de la forme $(X^2 - \alpha X + 1)$, où $\alpha \in \mathbb{C}$.

b) [*Question hors-interrogation*] (*Oral X 2021*)

Factoriser dans $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$ le polynôme $R(X) = 1 + 2X + 3X^2 + 2X^3 + X^4$.