Interrogation n°0. *Barème sur 23.5 pts. Durée 1h15*

1) [2 pts] On considère le réel $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$. Montrer que x est irrationnel. On rappelle que $e^{\alpha \ln 2} = 2^\alpha$.

2) Soient $p_1, p_2, ..., p_r$ des nombres premiers distincts. On peut donc supposer $2 \leq p_1 < p_2 < ... < p_r$.

a) [1.5 pt] Soient des entiers $m_1, ..., m_r \in \mathbb{N}$. On pose $n = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}$.

Montrer $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $m_i \leq \lfloor \log n \rfloor$, où $\log n = \dfrac{\ln n}{\ln 2}$ est le logarithme de n en base 2.

b) [1.5 pt] Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

On note D_N le nombre d'entiers n compris entre 1 et N qui s'écrivent sous la forme $n = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}$.

Autrement dit, il s'agit des entiers $n \leq N$ dont tous les diviseurs premiers appartiennent à $\{p_1, p_2, ..., p_r\}$.

En utilisant a), montrer que $D_N \leq (1 + \log N)^r$.

c) [1.5 pt] En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.

3) Soient des entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$. On considère $E = \{1, 2, ..., n+1\}$.

a) [1 pt] On considère $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Donner le nombre $N(p, n, k)$ de parties A de E telles que $\operatorname{card} A = p + 1$ et $\max(A) = k + 1$.

b) [1 pt] En déduire la valeur de $S(p, n) = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$, qui s'écrit aussi $S(p, n) = \sum_{k=0}^n \binom{k}{p}$.

4) a) [1.5 pt] Étant donnés $(n+1)$ réels $y_0, y_1, ..., y_n$ dans $]a, b[$, montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que

$$0 \leq y_j - y_i < \frac{b-a}{n}$$

b) [2 pts] Montrer que $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

c) [1.5 pt] (*Oral Mines*) Soient 13 réels $x_0, x_1 ..., x_{12}$. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que

$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} < 2 - \sqrt{3}$$

Indication : Poser $x_i = \tan(\theta_i)$, où $\theta_i \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

5) Soit E un ensemble fini de cardinal n.

a) [1 pt] Soient A et B deux parties de E. Montrer que $\operatorname{card}(A \cap B) \geq (\operatorname{card} A) + (\operatorname{card} B) - n$.

b) [2.5 pts] Soient $A_1, ..., A_p$ des parties de E telles que $\operatorname{card} A_1 + \operatorname{card} A_2 + ... + \operatorname{card} A_p > n(p-1)$.

Montrer que $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_p$ n'est pas vide.

6) [2.5 pts] Pour tous entiers naturels n et $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f(n,m) = \left(\sum_{k=1}^{n+m} k\right) + m = \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1) + m$$

Montrer que $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection.

Indication : Pour $p \in \mathbb{N}$, on pourra poser $S(p) = \sum_{k=1}^{p} k$.

7) Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite *croissante* d'entiers naturels non nuls. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^{p} x_k$

a) [3 pts] Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout entier $n \in \mathbb{N}$ s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{p} \varepsilon_k \; x_k$, où $p \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., p\}$, $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$.

(ii) $x_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} \leq 1 + \sum_{j=0}^{k} x_j$.

b) [*Question hors-interrogation*] Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour que tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ admette *une unique* décomposition $n = \sum_{k\geq 0} \varepsilon_k x_k$, où les $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$.

8) [1 pt] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ni majorée ni minorée.

Soit un réel a. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n-1} \leq a < u_n$.

Indication : Pour p bien choisi, considérer $A = \{n \geq p \mid a < u_n\}$.