**Interrogation n°24 bis. Corrigé**

**Exercice A**

**1)** a) L'application $t \longmapsto (\cos t)^x = e^{x \ln \cos t}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et tend vers 0 lorsque $t \to 0^+$.

D'où l'existence de $F(x)$ comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Avec le changement de variable $u = \cos t$, avec $u \in [0, 1[$, on a $t = \arccos u$ et $dt = \dfrac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$.

Donc $F(x) = \int_1^0 \dfrac{-u^x \ du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^1 \dfrac{u^x}{\sqrt{1-u^2}} \ du$.

b) Posons $\forall u \in ]0, 1[$, $f(u, x) = \dfrac{u^x}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{e^{x \ln u}}{\sqrt{1-u^2}}$. On a :

- Pour tout $u$, l'application $x \longmapsto f(u, x)$ est de classe $C^\infty$ sur $[0, +\infty[$, et $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(u, x) = \dfrac{(\ln u)^n u^x}{\sqrt{1-u^2}}$.

- Les applications $u \longmapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(u, x) = \dfrac{(\ln u)^n}{\sqrt{1-u^2}}$ sont intégrables sur $]0, 1[$.

En effet, $\dfrac{(\ln u)^n u^x}{\sqrt{1-u^2}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$ en $u = 0^+$ et $\dfrac{(\ln u)^n u^x}{\sqrt{1-u^2}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-u}}\right)$ en $u = 1$.

- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(u, x)\right| \leq \dfrac{(\ln u)^n}{\sqrt{1-u^2}} = \varphi_n(u)$ et $\varphi_n$ sont intégrables sur $]0, 1[$.

Donc $F$ est $C^\infty$ sur $[0, +\infty[$, et $F^{(n)}(x) = \int_0^1 \dfrac{(\ln u)^n u^x}{\sqrt{1-u^2}} \ du = \int_0^{\pi/2} (\ln \cos t)^n \ dt$, avec $u = \cos t$.

**2)** Avec $u = 1 - \dfrac{t}{x}$, on a $F(x) = \dfrac{1}{x} \int_0^x \left(1 - \dfrac{t}{x}\right)^x \dfrac{dt}{(2t/x - t^2/x^2)^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} g(t, x) \ dt$.

avec $g(t, x) = \left(1 - \dfrac{t}{x}\right)^x \dfrac{1}{\sqrt{t}(2 - t/x)^{1/2}}$ si $t < x$, et 0 si $t > 0$.

- $\forall t > 0$, $\lim_{x \to +\infty} g(t, x) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{2t}}$.

- Pour tout $x > 0$, $|g(t, x)| \leq \dfrac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$, avec $\varphi$ intégrable sur $]0, +\infty[$.

(Remarque : l'inégalité résulte de $\forall t < x$, $\ x \ln\left(1 - \dfrac{t}{x}\right) \leq -t$ et de $2 - \dfrac{t}{x} \geq 1$ ).

Par cv dominée, $\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} g(t, x) \ dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{2t}} \ dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Donc $F(x) \sim_{+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

**3)** $F(x+2) = \left[-u^{x+1}\sqrt{1-u^2}\right]_0^1 + (x+1) \int_0^1 \dfrac{u^x - u^{x+2}}{\sqrt{1-u^2}} \ du = (x+1)\left(F(x) - F(x+2)\right)$.

Donc $F(x+2) = \dfrac{x+1}{x+2} F(x)$. Donc $F(x+2n) = F(x) \prod_{k=1}^n \left(\dfrac{x+2k-1}{x+2k}\right)$.

Par 2), on a $F(x+2n) \sim_{+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$, on conclut que $\prod_{k=1}^n \left(\dfrac{x+2k-1}{x+2k}\right) \sim \dfrac{1}{2F(x)} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

**4)** a) **-** On obtient $\int_0^1 (\ln u)^n \ du = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \ dt = (-1)^n n!$, avec $u = e^{-t}$.

Comme $u \longmapsto (\ln u)^n$ est de signe constant, $\int_0^1 |\ln u|^n \ du = n!$.

*Remarque* : On peut aussi calculer $\int_0^1 (\ln u)^n \ du$ par IPP.

- D'autre part, $\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \ du = [\arcsin u]_0^{\pi/2} = 1$.

b) On coupe l'intégrale en deux : sur chaque partie, l'une des fonctions est bornée et l'autre intégrable :

On a $\forall u \leq \dfrac{1}{2}$, $\ \dfrac{|\ln u|^n}{\sqrt{1-u^2}} \leq \sqrt{2} \, |\ln u|^n$ et $\forall u \geq \dfrac{1}{2}$, $\ \dfrac{|\ln u|^n}{\sqrt{1-u^2}} \leq \dfrac{(\ln 2)^n}{\sqrt{1-u^2}}$.

Donc $F^{(n)}(0) \leq \sqrt{2}\,|\ln u|^n + \dfrac{(\ln 2)^n}{\sqrt{1-u^2}} = O(n!) + O(1) = O(n!)$.

c) On a $\dfrac{u^x}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{e^{x\ln u}}{\sqrt{1-u^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n(u)$, avec $\omega_n(u) = \dfrac{(\ln u)^n x^n}{n!\sqrt{1-u^2}}$.

On a $\int_0^{+\infty} |\omega_n(u)|\ du = O(x^n)$ lorsque $n \to +\infty$ par b).

On en déduit que pour $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\omega_n(u)|\ du$ converge.

Par le théorème ITT, on a pour $|x| < 1$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{(\ln u)^n}{n!\sqrt{1-u^2}}\ du$.

*Remarque* : La majoration de $F^{(n)}(0)$ en tant que telle ne permet pas de prouver que $f$ est DSE.

**Exercice B**

*Remarque* : Si $P = \lambda X^k + ...$, on a $f(P) = \alpha k X^{k-1} + ...$ Donc $\deg f(P) \leq \deg P$.

La matrice de $f$ dans la base canonique est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $(0, \alpha, 2\alpha, ..., n\alpha)$.

**1.** a) On a $\omega'(t) = \dfrac{\alpha t + \beta - 1}{t} = \alpha + \dfrac{\beta - 1}{t}$. Donc $\omega(t) = k e^{\alpha t} t^{(\beta-1)}$, avec $k > 0$.

b) L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$. On a $R(t) = O(1)$ en $t = 0$ et $R(t) = O_{+\infty}(t^m)$ où $m = \deg R$.

$\omega(t)\ R(t) = O(t^{(\beta-1)})$ et donc $\int_0^1 R(t)\ \omega(t)\ dt$ converge absolument par comparaison avec l'intégrale de Riemann.

Comme $\alpha < 0$, $\omega(t)\ R(t) == O_{+\infty}(t^{-2})$, donc par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} R(t)\ \omega(t)\ dt$ converge absolument.

**2.** *Remarque* : Soient $P$ et $Q \in E_n$. On a $P(t)Q(t)\omega(t) = O(\omega(t))$ en $0^+$ et $P(t)Q(t)\omega(t) = O_{+\infty}(t^{2n}\ \omega(t))$.

Par 1.b), $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\ \omega(t)\ dt$ est donc convergente. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\ ,\ \rangle$ sont évidentes.

D'autre part, comme $\omega > 0$, $\langle P, P\rangle \geq 0$, et $\langle P, P\rangle = 0$ ssi $\forall t \in ]0, +\infty[$, $P(t)^2 = 0$, donc ssi $P = 0$ (polynôme nul).

On a $\langle f(P), Q\rangle = \int_0^{+\infty} (aP'' + bP')\ Q\ \omega = \int_0^{+\infty} P''Q\ a\omega + \int_0^{+\infty} P'Q\ b\omega$.

En intégrant par parties sur $[\varepsilon, A]$, on a $\int_\varepsilon^A aP''Q\ \omega = [P'(aQ\omega)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A P'(aQ\omega)'$.

Compte tenu de 1.b), on a $[P'(aQ\omega)]_0^{+\infty} = 0$. Donc $\int_0^{+\infty} aP''Q\ \omega = -\int_0^{+\infty} P'(aQ\omega)'$.

D'autre part, on a $\int_0^{+\infty} P'(aQ\omega)' = \int_0^{+\infty} P'Q'(a\omega) + \int_0^{+\infty} P'Q(a\omega)'$.

Or, on a $(a\omega)' = a'\omega + a\omega' = b\omega$, donc $\int_0^{+\infty} P'(aQ\omega)' = \int_0^{+\infty} P'Q'(a\omega) + \int_0^{+\infty} P'Q\ b\omega$.

On en conclut que $\int_0^{+\infty} aP''Q\ \omega = -\int_0^{+\infty} P'Q'(a\omega)$.

**3.** a) On déduit de 2.b) que $\langle f(P), Q\rangle = \langle P, f(Q)\rangle$, c'est-à-dire $f$ est un endomorphisme symétrique.

Par le cours, tout endomorphisme symétrique en dimension finie admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Les vecteurs propres, qui sont ici des polynômes, ne peuvent être tous de degré $< n$, car sinon, ils ne pourraient former une base de $E_n$. Donc $f$ admet un moins un vecteur propre de degré $n$. En le normalisant (c'est-à-dire en le divisant par son coefficient dominant), on obtient le vecteur propre $B_n$ cherché.

La valeur propre cherchée est $\lambda_n = \alpha n$ d'après la remarque préliminaire.

b) L'endomorphisme conserve le degré, donc pour tout $0 \leq k \leq n$, $f$ induit un endomorphisme sur $E_k$.

Cette restriction est symétrique (pour le produit scalaire sur $E_k$).

Donc $f$ admet un vecteur propre $B_k$ de valeur propre $\lambda_k = \alpha k$.

La famille de vecteurs propres $(B_k)_{0 \leq k \leq n}$ ainsi construite est bien de degrés échelonnés, et comme les valeurs propres $\lambda_k$ sont distinctes, alors elle est orthogonale (**car les sev propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux et plus précisement en somme directe orthogonale**).

*Remarque* : $B_n$ est orthogonale à l'hyperplan $E_{n-1} = \mathrm{Vect}(B_0, B_1, ..., B_{n-1})$. Et $X^n - B_n \in E_n$.

Donc $B_n$ est le projeté orthogonal de $X^n$ sur $(E_{n-1})^{\perp}$. Ainsi, $(B_k)_{0 \leq k \leq n}$ est la base orthogonale obtenue en appliquant à la base canonique $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

**4.** a) Par Leibniz, $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{n!}{k!} x^k (-1)^k e^{-x}$.

Donc $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{n!}{k!} (-1)^{n-k} x^k$, polynôme de degré $n$ et unitaire.

b) Comme $L_n$ est de degré $n$ et unitaire, il suffit de prouver que $\langle L_n, Q \rangle = 0$ pour tout $Q \in E_{n-1}$.

On a $\langle L_n, Q \rangle = \int_0^{+\infty} L_n(t) Q(t)\ e^{-t}\ dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) Q(t)\ dt$, où $g(t) = t^n e^{-t}$.

En intégrant $n$ fois par parties, on obtient : $\langle L_n, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} [g^{(n-k-1)}(t) Q^{(k)}(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} g(t) Q^{(n)}(t)\ dt$.

Il suffit pour conclure de justifier que tous les termes du second membre sont nuls.

Comme $\deg Q < n$, alors $Q^{(n)} = 0$, donc $\int_0^{+\infty} g(t) Q^{(n)}(t)\ dt = 0$.

D'autre part, pour tout $j < n$, $g^{(j)}(t)$ est de la forme $C_j(t) e^{-t}$, où $C_j$ est un polynôme de degré $n$ admettant 0 comme racine d'ordre $n - j$. Donc $g^{(j)}(0) = 0$ et $g^{(j)}(t) = O_{+\infty}(t^n e^{-t})$, d'où $[g^{(n-k-1)}(t) Q^{(k)}(t)]_0^{+\infty} = 0$.

**5.** a) Le coefficient en $t^n$ de $\psi$ est $d_n = (n+1) n c_{n+1} + (n+1) c_{n+1} - n c_n = (n+1)^2 c_{n+1} - n c_n$.

b) Deux séries entières coïncident (sur un voisinage de 0) ssi elles ont les mêmes coefficients.

On a $\psi = \lambda \varphi$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{\lambda + n}{(n+1)^2} c_n$, donc ssi $c_n = \dfrac{c_0}{(n!)^2} \prod_{k=0}^{n-1} (\lambda + k)$.

Le rayon de convergence de la série entière ainsi définie est toujours $R = +\infty$ (par le critère de d'Alembert lorsque les $\lambda$ n'appartiennent pas à $\mathbb{Z}^-$ ; lorsque $\lambda \in \mathbb{Z}^-$, les solutions sont polynomiales.

On en déduit que tout réel $\lambda$ est valeur propre et que le sev propre $E_\lambda$ est une droite vectorielle.