Interrogation n°24 new. Corrigé

Exercice A (*début du sujet Centrale MP 2022*)

1) Par l'IAF (inégalité des accroissements finis), $\forall x \in [0,1]$, $|f(x) - f(a_1)| \leq |x - a_1| \, \|f'\|_\infty$.

Comme x et $a_1 \in [0,1]$., alors $|f(x) - f(a_1)| \leq \|f'\|_\infty$, donc $|f(x)| \leq \|f'\|_\infty + |f(a_1)|$.

Donc $C_1 = 1$ convient.

Variante : On peut aussi utiliser $f(x) = f(a_1) + \int_{a_1}^{x} f'(t)\, dt$, d'où on déduit $|f(x)| \leq \|f'\|_\infty + |f(a_1)|$.

2) a) Par le TAF, il existe $y \in]a_1, a_2[$ tel que $\dfrac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} = f'(y)$.

Par le raisonnement du a) appliqué à f', on a bien $|f'(x) - f'(y)| \leq \|f''\|_\infty$.

b) Il résulte de a) que $|f'(x)| \leq \|f''\|_\infty + \left|\dfrac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}\right|$.

Donc $\|f'\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + K \ |f(a_1)| + K \ |f(a_2)|$, où $K = \dfrac{1}{|a_2 - a_1|}$.

Il résulte de a) que $C_1 + 1 + K$ et $C_2 = K$ conviennent.

3) *Remarque* : u est linéaire, injectif (car tout polynôme non nul de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ admet au plus $(p-1)$ racines) et donc bijectif par dimension (car $\dim \mathbb{R}_{p-1}[X] = \dim \mathbb{R}^p$).

a) On prend $L_k = u^{-1}(E_k)$, où $(E_1, ..., E_p)$ base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Avec $P(x) = \sum_{k=1}^{p} f(a_k) L_k(x)$, on a par linéarité $u(P) = \sum_{k=1}^{p} f(a_k) E_k$, c'est-à-dire $P(a_k) = f(a_k)$ pour tout k.

b) Posons $g = f - P$. La fonction g est de classe C^∞ et s'annule en les p points $a_1, ..., a_p$.

On montre par récurrence sur k que $g^{(k)}$ admet au moins $(p-k)$ zéros : pour $k < p$, on prouve la propriété pour $g^{(k+1)}$ en appliquant le lemme de Rolle sur chaque intervalle défini par les $(p-k)$ zéros de $g^{(k)}$ classés par ordre croissant (de sorte à obtenir $(p-k-1)$ zéros distincts.

c) Il résulte de 1) que si $h \in E$ s'annule (au moins une fois), alors $\|h\|_\infty \leq \|h'\|_\infty$.

On applique cette propriété à tous les $g^{(k)} = f^{(k)} - P^{(k)}$ qui par b), admettent au moins un zéro (pour $k < p$).

4) Avec les notations de 3), on a, $\|g\|_\infty \leq \|g'\|_\infty \leq ... \leq \left\|g^{(p)}\right\|_\infty$, où $g = f - P$.

Comme $P^{(p)} = 0$, alors $\|f - P\|_\infty \leq \left\|f^{(p)}\right\|_\infty$.

On a $P(x) = \sum_{k=1}^{p} f(a_k) L_k(x)$, où L_k polynôme de Lagrange.

Donc $\|f\|_\infty \leq \left\|f^{(p)}\right\|_\infty + \sum_{k=1}^{p} C_k \ |f(a_k)|$, où $C_k = \|L_k\|_\infty$.

5) a) On sait qu'il existe C_1 et C_2 indépendants de n tels que $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n''\|_\infty + C_1 \ |f_n(0)| + C_1 \ |f_n(1)|$.

Par comparaison, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge normalement, donc $\sum f_n$ converge.

Et on a par 1), $|f_n'(x)| \leq \|f_n''\|_\infty + \left|\dfrac{f_n(1)-f_n(0)}{1-0}\right| \leq \|f_n''\|_\infty + |f_n(0)| + |f_n(1)|$, donc $\sum f_n'$ converge.

Par le cours, on en déduit que $\sum f_n$ est de classe C^2.

b) σ est une bijection affine de $[0,1]$ sur $[a,b]$. On a σ' constante de valeur $(b-a)$.

Les fonctions g_n sont de classe C^∞ sur $[0,1]$, et on a $\sup_{[0,1]}|g_n| = \sup_{[a,b]}|f_n|$.

D'autre part, on a $g_n'' = (b-a)^2 f_n''$, donc $\sup_{[0,1]}|g_n''| = (b-a)^2 \sup_{[a,b]}|f_n|$.

Il en résulte que les séries $\sum \|g_n''\|_\infty$et $\sum |g_n(0)|$ et $\sum |g_n(1)|$ convergent. Par a), $\sum g_n$ est de classe C^2.

Comme $f_n = g_n \circ \sigma^{-1}$, alors $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n\right) \circ \sigma^{-1}$ existe et est aussi de classe C^2.

Exercice B

Posons $u_k = P(X_n = k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$. On a pour $1 \leq k \leq n$:

$u_k \geq u_{k-1}$ ssi $\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \geq \binom{n}{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}$ ssi $\dfrac{n-k+1}{k}\dfrac{p}{q} \geq 1$ ssi $np - kp + p \geq kq$.

Comme $kp + kq = p$, on obtient donc : $u_k \geq u_{k-1}$ ssi $k \leq np + p$ ssi $k \leq \lfloor np + p \rfloor$.

Donc $u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_{x_n} \geq ... \geq u_n$, et le maximum de $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ est bien atteint en $k = x_n$.

Remarque : En fait, on pourrait aussi prendre $u_k > u_{k-1}$ au lieu de $u_k \geq u_{k-1}$, et on obtient alors $x_n = \lceil np - q \rceil$ comme c'est le cas dans l'énoncé d'origine. Noter que $np - q = (np + p) - 1$.

Exercice C

Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_k > \mu_k$.

On a $\dim F_k + \dim G_k' = k + (n+1-k) = n+1 > n$, donc F_k et à G_k' ne peuvent être en somme directe, et ainsi, leur intersection n'est pas réduite à $\{\overrightarrow{0}\}$.

Il existe donc un vecteur non nul, qu'on peut normaliser.

Donc il existe X de norme 1 appartenant à la fois à F_k et à G_k'.

Or, on vérifie aisément que comme $X \in F_k$, alors $X^T AX \geq \min(\lambda_1, ..., \lambda_k) = \lambda_k$.

Et de même, comme $X \in G_k$, on a $X^T BX \leq \max(\mu_k, ..., \mu_n) = \mu_k$.

Donc $X^T MX = X^T(B-A)X \leq \mu_k - \lambda_k < 0$. Ce qui contredit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$.