Interrogation n°24. *Barème sur 24 pts*

Exercice A (*début du sujet Centrale MP 2022*)

On note E l'ev des fonctions de classe C^∞ définies sur $[0,1]$. Pour $g \in E$, on pose $\|g\|_\infty = \sup_{[0,1]} |g|$.

1) [2 pts] Soit $a_1 \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ (indépendante de f) tel que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + C_1 \; |f(a_1)|$$

2) a) [2.5 pts] Soient a_1 et $a_2 \in [0,1]$ distincts. Montrer que

$$\left| f'(x) - \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \right| \leq \|f''\|_\infty$$

b) [2.5 pts] En déduire qu'il existe C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + C_1 \; |f(a_1)| + C_2 \; |f(a_2)|$$

3) Soient $p \geq 1$, et p réels distincts $a_1, ..., a_p$ appartenant à $[0,1]$. Soit $f \in E$.

a) [2 pts] On sait que l'application $u : \mathbb{R}_{p-1}[X] \to \mathbb{R}^p \;\; Q \longmapsto (Q(a_k))_{1 \leq k \leq p}$ est un isomorphisme linéaire .

En déduire qu'il existe $L_1, \dots , L_p \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tels que pour $f \in E$, le polynôme $P(X) = \sum_{k=1}^p f(a_k) L_k(X)$ vérifie

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \quad P(a_k) = f(a_k)$$

b) [2 pts] Montrer que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ admet au moins $(p-k)$ zéros.

Remarque : On ne demande pas de détailler la preuve de toutes les propriétés utilisées.

c) [2.5 pts] En déduire que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leq \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty$.

4) [3 pts] Soient $p \geq 1$, et p réels distincts $a_1, ..., a_p$ appartenant à $[0,1]$.

Montrer qu'il existe des réels $C_1, ..., C_p$ tels que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \left\|f^{(p)}\right\|_\infty + \sum_{k=1}^{p} C_k \; |f(a_k)|$$

5) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe C^∞ définies sur $[a,b]$, avec $a < b$. On suppose que

- la série de fonctions $\sum f_n^{(2)}$ converge normalement sur $[a,b]$
- les deux séries $\sum f_n(a)$ et $\sum f_n(b)$ convergent absolument.

a) [3 pts] Dans le cas où $[a,b] = [0,1]$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ existe et est de classe C^2 sur $[0,1]$.

b) [2 pts] Traiter *brièvement* le cas général, en considérant $g_n = f_n \circ \sigma$, où $\sigma(t) = a + t(b-a)$.

Exercice B (*tout début sujet X MP 2021*) [3 pts]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$. Soit X_n une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On pose $q = 1 - p$.

On considère le nombre entier $x_n = \lfloor np + p \rfloor$ et la probabilité $p_n = P(X_n = x_n)$.

Montrer que p_n est la valeur maximale de $\{P(X_n = k), \, k \in [\![0,n]\!]\}$.

Exercice C (★)

Soient A et $B \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres respectives $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ et $\mu_1 \geq ... \geq \mu_n$.

On pose $M = B - A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer (par l'absurde) que si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k \leq \mu_k$.

Indication : Considérer $X \in F_k \cap G_k$ où $F_k = \text{Vect}(Y_1, ..., Y_k)$ et $G_k = \text{Vect}(Z_k, ..., Z_n)$,

où $(Y_1, ..., Y_n)$ et $(Z_1, ..., Z_n)$ sont des bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, avec $AY_j = \lambda_j Y_j$ et $BZ_j = \mu_j Z_j$.