**Interrogation n°24. Corrigé**

**Exercice A**

A.1) Si $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent, alors $\sum |c_n|$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

A.2) - $R = \sup\{\rho \geq 0 \mid (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée }\}$ et en fait on a aussi $R = \sup\{\rho \geq 0 \mid \lim_{n\to+\infty} a_n\rho^n = 0\}$

- $R$ est l'unique réel tel que $\begin{cases} \sum a_n z^n \text{ converge absolument si } |z| < R \\ \sum a_n z^n \text{ diverge (grossièrement) si } |z| > R \end{cases}$

- Si il existe $L = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ (mais la limite n'existe pas nécessairement), alors $R = \dfrac{1}{L}$.

A.3) Sommation par paquets : $(a_n)_{n\in E}$ est sommable ssi les familles $(a_n)_{n\in F_k}$ sont sommables et que la famille $(\sum_{n\in F_k} a_n)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable, et on a alors $\sum_{n\in E} a_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\in F_k} a_k\right)$.

*Remarque* : Bien que HP, on pourrait écrire : $(a_n)_{n\in E}$ est sommable ssi $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\in F_k} |a_k|\right) < +\infty$.

A.4) On peut obtenir les coeff du DSE soit par dérivation $p$ fois de $\dfrac{1}{1-x}$ soit par le développement de Taylor.

On obtient $\forall x \in ]-1,1[$, $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(p+1)...(p+n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{n} x^n$.

A.5) On a $f(X) = f(\overrightarrow{0}) + Z^T X + \frac{1}{2} X^T H X + \mathfrak{o}\left(\|X\|^2\right)$ lorsque $X \to \overrightarrow{0}$,

où $Z = \text{grad}\, f(\overrightarrow{0}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\overrightarrow{0})\right)_{1\leq j\leq n}$ et $H = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{0})\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ matrice Hessienne.

Autrement dit, $f(x_1, ..., x_n) = f(\overrightarrow{0}) + \sum_{j=1}^n x_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\overrightarrow{0}) + \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{0}) + \mathfrak{o}\left(x_1^2 + ... + x_n^2\right)$.

**Exercice B**

B.1) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t \ln t}$ décroît donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n \ln n}$ de même nature que $\int_e^{+\infty} \dfrac{dt}{t \ln t} = [\ln \ln t]_e^{+\infty} = +\infty$.

B.2) On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \dfrac{n+2}{2n+2} = \dfrac{1}{2}$, donc par D'Alembert, la série converge.

B.3) La fonction $t \longmapsto t^\alpha$ est concave (dérivée décroissante $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$).

Par le TAF, $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = f'(y_n)$, avec $y_n \in ]n, n+1[$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

D'autre part, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Par le CSSA, $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ converge.

B.4) On a $(a_{n+1} - a_n)b_n = O(|a_{n+1} - a_n|)$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante positive, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

De plus, $|a_{n+1} - a_n| = a_n - a_{n+1}$. Donc $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge. Par comparaison, $\sum (a_{n+1} - a_n) b_n$ converge.

**Exercice C**

C.1) $f(X)$ et $f(-X)$ ont même loi. Comme $f$ impaire, alors $f(-X) = -f(X)$. Donc $f(X)$ est symétrique.

Supposons $f(X)$ est d'espérance finie.

L'espérance ne dépend que de la loi, donc $E(f(X)) = E(-f(X))$, d'où $E(f(X)) = 0$.

C.2) $P((X,Y) = -(x,y)) = P(X = -x)P(Y = -y) = P(X = x)P(Y = y) = P((X,Y) = (x,y))$.

Donc $(X,Y)$ est symétrique.

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \longmapsto x + y$ est impaire, alors par 1), $X + Y$ est symétrique.

C.3) On a $P(ZX=x,ZY=y) = P(ZX=x,ZY=y,Z=1) + P(ZX=x,ZY=y,Z=-1)$

$= P(X=x,Y=y,Z=1) + P(X=-x,Y=-y,Z=-1)$ et par indépendance, on obtient

$= P(X=x)P(Y=y)P(Z=1) + P(X=-x)P(Y=-y)P(Z=-1) = P(X=x)P(Y=y)$.

Comme $X$ symétrique et indépendantes de $Z$, on a $P(ZX=x) = \frac{1}{2}P(X=x) + \frac{1}{2}P(X=-x) = P(X=x)$ et de même $P(Y=y) = P(ZY=y)$, ce qui permet de conclure $P(ZX=x,ZY=y) = P(ZX=x)P(ZY=y)$, d'où $ZX$ et $ZY$ indépendantes.

**Exercice D**

D.1) $\left|\dfrac{r^k}{k!}\cos(k\theta)\right| \leq \dfrac{r^k}{k!}$ et la série $\sum \dfrac{r^k}{k!}$ converge (par D'Alembert), donc $\sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{r^k}{k!}\cos(k\theta)$ converge.

On a $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{r^k}{k!}\cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(re^{i\theta})^k}{k!}\right) = \mathrm{Re}\left(\exp(re^{i\theta})\right) = e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)$.

D.2) a) On a $(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$, donc $\|AB\|_\infty \leq n\,\|A\|_\infty\,\|B\|_\infty$.

b) Par a) et récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left\|A^k\right\|_\infty \leq n^{k-1}\,\|A\|_\infty^k$. Donc $\sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{n^{k-1}\,\|A\|_\infty^k}{k!}$ converge.

Ainsi, pour tous $(i,j)$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{A^k}{k!}\right)_{i,j}$ converge par comparaison. Donc $\sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{A^k}{k!}$ converge.

**Exercice E**

E.1) Par définition, $g_n \in F_n$.

Il reste à prouver que $f - g_n \in (F_n)^\perp$, c'est-à-dire $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\langle g_n - f, e_k\rangle = 0$.

Or, $\langle g_n, e_k\rangle = \sum_{j=0}^n \langle f, e_j\rangle \langle e_j, e_k\rangle = \sum_{j=0}^n \langle f, e_j\rangle\,\delta_{jk} = \langle f, e_k\rangle$, d'où $\langle g_n - f, e_k\rangle = 0$.

E.2) Par Pythagore, $\|f\|^2 = \|f-g_n\|^2 + \|g_n\|^2 \geq \|g_n\|^2 = \sum_{k=0}^n \langle f, e_k\rangle^2$. On conclut en faisant $n \to +\infty$.

**Exercice F**

Soit $\lambda > 0$. On pose $\forall x \geq 0$. $S(x) = f(x)\exp(-\lambda x)$.

La série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!}x^n$ est de rayon de convergence infini, car $\left|\dfrac{a_n}{n!}\right| \leq |a_n|$.

On en déduit que l'application $f$ est continue, donc $S$ est continue.

On va utiliser le th ITT qui permet d'ailleurs de justifier en même temps l'intégrabilité de $S$.

On a $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$, où $g_n(x) = \dfrac{a_n}{n!}x^n e^{-\lambda x}$ continue.

On a $\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = \dfrac{a_n}{n!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = \dfrac{a_n}{\lambda^{n+1}}$, car $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} \theta^n e^{-\theta}\,d\theta = n!$

On a $\int_0^{+\infty} |g_n(x)|\,dx = \dfrac{|a_n|}{\lambda^{n+1}}$.

Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|a_n|}{\lambda^{n+1}}$ converge, alors $S$ est intégrable et $\int_0^{+\infty} S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{\lambda^{n+1}}$.

*Remarque* : On pourrait aussi prouver directement que $S$ est intégrable :

On a $|S(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|a_n|}{n!}x^n \exp(-\lambda x)$. Mais pour tout réel $\rho > 0$, il existe $M$ tel que $|a_n| \leq M\rho^n$.

Donc $|S(x)| \leq M\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\rho^n}{n!}x^n \exp(-\lambda x) = M\exp((\rho-\lambda)x)$.

En prenant $\rho = \frac{1}{2}\lambda$, on a $S(x) = O_{+\infty}(\exp(-\rho x))$ donc $S$ est intégrable.

**Exercice G**

G.1) Comme $f'$ est intégrable, alors a fortiori, il existe $L = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f'(t)\ dt$, c'est-à-dire $f$ converge en $+\infty$.

*Remarque* : $f$ peut converger sans que $f'$ soit intégrable, par exemple si $f'(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

G.2) $\int_0^x f(t) \exp(i\lambda t)\ dt = \left[\dfrac{f(t)\exp(i\lambda t)}{i\lambda}\right]_0^x - \int_0^x \dfrac{f'(t)\exp(i\lambda t)}{i\lambda}\ dt.$

La fonction $t \longmapsto f'(t)\exp(i\lambda t)$ est intégrable car en $O_{+\infty}(|f'(t)|)$.

Donc $J(\lambda)$ existe ssi il existe $\lim_{t\to+\infty} f(t)\exp(i\lambda t)$, donc ssi $L = 0$ (car $L = \lim_{+\infty} f$ existe par 1)).

On a $J(\lambda) = -\dfrac{f(0)}{i\lambda} - \dfrac{1}{i\lambda}\int_0^{+\infty} f'(t)\exp(i\lambda t)\ dt$, donc $|J(\lambda)| \leq \dfrac{|f(0)|}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} |f'(t)|\ dt = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

**H.1)** Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = a_n(x+iy_0)^n$. On a $f_n$ de classe $C^1$, et $f_n'(x) = na_n(x+iy_0)^{n-1}$.

Soit $\rho < r$. On a $\forall x \in [-\rho, \rho]$, $x^2 + y_0^2 \leq \rho^2 + y_0^2 < R$.

On a $\sup_{x\in[-\rho,\rho]} |f_n'(x)| = n\,|a_n|\,(\rho^2+y_0^2)^{n-1}$.

La série $\sum na_nz^{n-1}$ admet aussi $R$ comme rayon. Donc $\sum n\,|a_n|\,(\rho^2+y_0^2)^{n-1}$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-\rho, \rho]$.

On en déduit que $f$ est de classe $C^1$ sur $]-r, r[$ et que $\forall x \in ]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n(x+iy_0)^{n-1}$.

H.2) On montre de même que pour $x_0 \in ]-1, 1[$,

l'application $g : y \longmapsto \sum a_n(x_0+iy)^n$ est de classe $C^1$ sur $]-r, r[$, où $r = \sqrt{R^2 - r_0^2}$.

Ainsi, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ existent sur $D$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = i\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$.

Par le cours, on admet la continuité de $z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} na_nz^{n-1}$ sur le disque de convergence, qui est $D$.

Par composition avec $(x,y) \longmapsto z = x+iy$, on en déduit que $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ sont continues, donc $F$ de classe $C^1$.

**Z.1)** On a $f(t) = O_{+\infty}(|tf(t)|)$, donc $f$ est intégrable par comparaison.

Z.2) L'application $F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\ dt$ est de classe $C^1$ et strictement croissante, car $F' = f$.

Donc $F$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$, car $\lim_{x\to+\infty} F(x) = M$.

On a $\theta \in [0, 1[$. D'où l'existence et l'unicité de $x = F^{-1}(M\theta)$.

Z.3) Avec le changement de variable $\theta = \dfrac{1}{M}F(t)$ valide car $F$ bijection de classe $C^1$, on a

$\int_0^1 x(\theta)\ d\theta = \dfrac{1}{M}\int_0^{+\infty} F^{-1}(f(t))\ F'(t)\ dx = \dfrac{1}{M}\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt.$

La seconde intégrale existe, donc la première aussi. Ainsi, $\int_0^1 x(\theta)\ d\theta = \dfrac{\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt}{\int_0^{+\infty} f(t)\ dt}$.