Interrogation n°23 bis. Corrigé

Premier problème. Théorème central limite (pour les transformées de Fourier)

1) On a $V(Z_n) = \alpha_n^2 V(S_n) = \alpha_n^2 n\sigma$, donc on prend $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n\sigma}}$.

2) a) e^{itX} est d'espérance finie car $\left|e^{itX}\right| \leq 1$. Par le th du transfert, $E(e^{itX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n}$.

b) Posons $f_n(t) = a_n e^{itx_n}$. Alors $f_n'(t) = ix_n a_n e^{itx_n}$ et $f_n''(t) = -x_n^2 a_n e^{itx_n}$.

Comme $E(|X|)$ et $E(X^2)$ sont finies, les séries $\sum f_n'(t)$ et $\sum f_n''(t)$ convergent absolument.

De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n''(t)| = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 a_n = E(X^2) < +\infty$.

Donc $\sum f_n''$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Donc f est C^2 et on peut dériver sous $\sum$.

Ainsi, $\varphi'(t) = iE(Xe^{itX})$ et $\varphi''(t) = -E(X^2 e^{itX})$. En particulier, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) = -E(X^2)$.

3) On a $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{X_n}{\sqrt{n\sigma}}$. Donc $\exp(itZ_n) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(it\dfrac{X_n}{\sqrt{n\sigma}}\right)$.

Comme les $\dfrac{X_n}{\sqrt{n\sigma}}$ sont indépendants, alors les $\exp\left(it\dfrac{X_n}{\sqrt{n\sigma}}\right)$ le sont aussi.

Donc $\phi_n(t) = E\left(\exp\left(it\dfrac{X_n}{\sqrt{n\sigma}}\right)\right)^n = \varphi\left(\dfrac{t}{\sqrt{n\sigma}}\right)^n$.

4) a) Par le binôme, $(1+z)^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^k$, donc $|(1+z)^n - 1| \leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |z|^k = (1+|z|)^n - 1$.

b) Par a), $|(1+z_n)^n - 1| \leq (1+|z_n|)^n - 1$.

Or, $|z_n| = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $(1+|z_n|)^n \to e^0 = 1$, d'où $\lim_{n\to+\infty} |(1+z_n)^n - 1| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}(1+z_n)^n = 1$.

c) On a $y_n = (1 - \frac{\lambda}{n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right))(1 + \frac{\lambda}{n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right))$, donc $y_n = 1 + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par b), $\lim_{n\to+\infty}(y_n)^n = 1$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}(1+z_n)^n = e^\lambda$.

5) On a $\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{1}{2}h^2\varphi''(0) + \mathfrak{o}\left(h^2\right) = 1 + ih\mu - \frac{1}{2}h^2\sigma^2 + \mathfrak{o}\left(h^2\right)$

Donc $\phi(t) = \left(1 - \frac{1}{2n}t^2 + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to \exp(-\frac{1}{2}t^2)$ d'après 4).

Second problème.

1) $P(X > K) = \sum_{k=K+1}^{+\infty} P(X = k)$ converge vers 0 comme reste d'une série convergente.

Donc il existe K tel que $P(X > K) \leq \varepsilon$.

Pour chaque $k \leq K$, on a par hypothèse $\lim_{n\to+\infty} |P(X_n = k) - P(X = k)| = 0$.

Donc par linéarité de la limite (somme finie), $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} |P(X_n = k) - P(X = k)| = 0$.

Donc pour n_0 assez grand, $\sum_{k=0}^{K} |P(X_n = k) - P(X = k)| \leq \varepsilon$.

2) $1_{X_n\in A} - 1_{X\in A} = \left(1_{X_n\in A\cap F} + 1_{X_n\in A\cap\overline{F}}\right) - \left(1_{X\in A\cap F} + 1_{X\in A\cap\overline{F}}\right)$.

Donc par inégalité triangulaire, $1_{X_n\in A} - 1_{X\in A} \leq 1_{X_n\in A\cap F} - 1_{X\in A\cap F} + 1_{X_n\in A\cap\overline{F}} + 1_{X\in A\cap\overline{F}}$.

De plus $1_{X_n\in A\cap\overline{F}} \leq 1_{X_n\in\overline{F}}$ et $1_{X\in A\cap\overline{F}} \leq 1_{X\in A}$.

Donc $P(X_n \in A) - P(X \in A) \leq P(X_n \in A\cap F) - P(X \in A\cap F) + P(X_n \notin F) + P(X \notin F)$.

d'où $P(X_n \in A) - P(X \in A) \leq |P(X_n \in A\cap F) - P(X \in A\cap F)| + P(X_n \notin F) + P(X \notin F)$.

On peut permuter les rôles de X_n et X, d'où on conclut.

3) On a : $|P(X_n \in A\cap F) - P(X \in A\cap F)| \leq \sum_{k=0}^{K} P(X_n = k) - P(X = k) \leq \varepsilon$ par 1)

On a aussi $P(X > K) \leq \varepsilon$.

Et enfin $P(X_n > K) \leq 2\varepsilon$, car $P(X_n > K) - P(X > K) = P(X \in F) - P(X_n \in F) \leq \varepsilon$.

Exercice A. Transformée de Laplace d'une v.a. de loi géométrique

1) On considère une v.a. X de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$. On utilise le th du transfert.

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X=n)e^{zn} = e^{-\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\lambda^n e^{zn}}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(\lambda e^z)^n}{n!}$ converge **absolument**.

En effet, $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X=n)\,|e^{zn}| = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(X=n)e^{\mathrm{Re}(z)n} = e^{-\lambda}\exp(\lambda e^{\mathrm{Re}\,z})$.

On en déduit que $\exp(zX)$ est d'espérance finie, et que

$$E(\exp(zX)) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^z)^n}{n!} = \exp(-\lambda+\lambda e^z)$$

Remarque : En fait, $E(\exp(zX)) = G_X(e^z)$.

2) a) $E(Z_n) = \dfrac{E(X_x)}{x} = 1$ et $V(Z_x) = \dfrac{V(X_x)}{x^2} = \dfrac{1}{x}$.

Par Bienaymé-Tchebychev, $P(|Z_x - 1| \le \varepsilon) \le \dfrac{V(Z_x)}{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{\varepsilon^2 x}$.

b) Soit $t>0$, $P(Z_x \ge 1+\varepsilon) = P(\exp(tZ_x) \ge \exp(t(1+\varepsilon))$.

Comme $\exp(tZ_x)\ge 0$, alors par Markov, $P(\exp(tZ_x)\ge \exp(t(1+\varepsilon)). \le \dfrac{E(\exp(tZ_x))}{e^{tx(1+\varepsilon)}} = e^{x(e^t-1-t-\varepsilon t)}$.

c) La fonction $\varphi(t) = (e^t - 1 - t - \varepsilon t)$ vérifie $\varphi(t)\sim -\varepsilon t$ en $t=0^+$.

Donc $t>0$ assez petit, on a $\varphi(t)<0$. Il suffit donc de prendre $\rho = \varphi(t)$ pour conclure.

Exercice B

1) a) Résulte de (cf en fait inégalité de Cauchy-schwarz) : $E(|X_n - X|)^2 \le E((X_n-X)^2) \to 0$.

b) Résulte de l'inégalité de Markov :

Comme $|X_n - X|\ge 0$, alors $P(|X_n - X| > \varepsilon) \le \dfrac{E(|X_n - X|)}{\varepsilon} \to 0$.

c) On suppose f lispchitzienne de rapport k et on pose $M = \sup|f|$.

Posons A_n l'événement $|X_n - X| > \varepsilon$ et Y_n la variable $|f(X_n) - f(X)|$

Comme $|E(f(X_n)) - E(f(X))| = |E(f(X_n) - f(X))| \le E(Y_n)$, il suffit de prouver que $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = 0$.

Or, $Y_n = Y_n.1_{A_n} + Y_n.1_{\overline{A_n}}$. On a $E(Y_n.1_{A_n}) \le E(2M\ .1_{A_n}) = 2M\ P(A_n)$.

D'autre part, si $|X_n - X|\le k\varepsilon$, alors $Y_n \le k\varepsilon$, donc $E(Y_n.1_{\overline{A_n}}) \le k\varepsilon\ P(\overline{A_n}) \le k\varepsilon$.

On en déduit que $E(Y_n) \le 2M\ P(A_n) + k\varepsilon \le (k+1)\varepsilon$ pour n assez grand.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = 0$.

2) On a $E(X_n) = 2^{n+1}\dfrac{1}{2^{n+1}} = 1$ et $E(X_n^2) = (2^{n+1})^2\dfrac{1}{2^{n+1}} = 2^{n+1}$.

D'autre part, $P(|X_n| > \varepsilon)$ vaut 0 si $\dfrac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon$ et vaut 1 sinon, donc $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n|>\varepsilon) = 0$.

On en déduit que (i) et (ii) sont vérifiées et que (iii) et (iv) ne le sont pas.