Interrogation n°23 bis

Premier problème. Théorème central limite (pour les transformées de Fourier)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables réelles indépendantes $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, et de même loi que X.

On suppose X de $\boxed{\text{moment d'ordre 2 fini et d'espérance nulle}}$. On a $E(X) = 0$ et on pose $\sigma^2 = V(X)$.

1) On pose $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^n X_n}$. Trouver α_n de sorte que $\boxed{Z_n = \alpha_n S_n}$ vérifie $E(Z_n) = 0$ et $\boxed{V(Z_n) = 1}$.

2) a) On suppose $\operatorname{Im} X \subset \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_n = P(X = x_n)}$.

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{itX} est d'espérance finie et que $E(e^{itX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n}$.

b) Montrer que $\boxed{\varphi : t \longmapsto E(e^{itX})}$ est de classe C^2 et calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

3) On pose $\phi_n(t) = E(e^{itZ_n})$, avec les notations de 1). Exprimer $\phi_n(t)$ à l'aide de φ, t, σ et n.

4) a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|(1+z)^n - 1| \leq (1+|z|)^n - 1$.

b) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose $|z_n| = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(1+z_n)^n = 1$.

c) On suppose $z_n = \frac{\lambda}{n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, où $\lambda \in \mathbb{C}$. En utilisant $y_n = e^{-\lambda/n}(1+z_n)$, montrer que $\lim_{n\to+\infty}(1+z_n)^n = e^\lambda$.

5) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \phi_n(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$.

Second problème *(inspiré X MP 2022)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. entières à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

1) Soit $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe $K \notin \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les deux propriétés suivantes soit vérifiées

$$P(X > K) \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_0,\ \sum_{k=0}^{K} |P(X_n = k) - P(X = k)| \leq \varepsilon$$

2) On pose $F = \{0, 1, 2, ..., K\}$. Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on a

$$|P(X_n \in A) - P(X \in A)| \leq |P(X_n \in A \cap F) - P(X \in A \cap F)| + P(X_n \notin F) + P(X \notin F)$$

3) Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \geq n_0$, $|P(X_n \in A) - P(X \in A)| \leq 4\varepsilon$.

Remarque : On en déduit ainsi que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n \in A) = P(X \in A)$.

La propriété est évidente dès le départ pour les parties FINIES (par linéarité de la limite).

Exercice A. Transformée de Laplace d'une v.a. de loi géométrique

1) On considère une v.a. X de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(zX)$ est d'espérance finie, et calculer $E(\exp(zX))$.

2) Soit X_x une loi de Poisson de paramètre x. On considère $Z_x = \dfrac{X_x}{x}$.

a) Donner $E(Z_x)$ et $V(Z_x)$. Montrer que pour tout $x > 0$, $P(|Z_x - 1| \leq \varepsilon) \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2 x}$.

b) Montrer avec 1) que pour tout réel $t > 0$, $P(Z_x \geq 1 + \varepsilon) \leq \dfrac{e^{x(e^t-1)}}{e^{tx(1+\varepsilon)}} = e^{x(e^t-1-t-\varepsilon t)}$.

d) En déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout x, $P(Z_x \geq 1 + \varepsilon) \leq e^{-\rho x}$.

Remarque : Par un raisonnement analogue, on montre que $\exists \rho > 0$, $\forall x > 0$, $P(Z_x \leq 1 - \varepsilon) \leq e^{-\rho' x}$.

Exercice B. Différents types de convergence

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r définie sur un même univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger vers X de plusieurs façons différentes :

(i) Convergence en loi : Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et lipschitzienne, $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = E(f(X))$.

(ii) Convergence en probabilité : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

(iii) Convergence L^1 : $\lim_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_1 = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} E(|X_n - X|) = 0$.

(iv) Convergence L^2 : $\lim_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_2 = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} E((X_n - X)^2) = 0$.

1) a) Montrer que (iv) implique (iii).

b) Montrer que (iii) implique (ii).

c) Montrer que (ii) implique (i).

2) On considère $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure $P(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, et $X_n = 2^{n+1}.1_{\{n\}}$.

Pour quels types de convergence définis ci-dessus la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers $X = \widetilde{0}$?