Interrogation n°23. Corrigé

Exercice A

Théorème(s) de transfert : D'une part, $f(X)$ est une variable aléatoire.

D'autre part, $f(X)$ est d'espérance finie ssi la famille $(P(X=x)f(x))_{x\in E}$ est sommable, c'est-à-dire ssi $\sum_{x\in E} P(X = x)\,|f(x)|$ converge. Dans ce cas, $E(f(X)) = \sum_{x\in E} P(X=x)f(x)$.

Exercice B

1) On a $P(S=k \mid N=n) = P(S_n = k \mid N=n) = P(S_n = k)$ car S_n et N sont indépendantes.

2) Soit $t\in[-1,1]$. On a $G_s(t) = E(t^S) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k)t^k$.

On a $P(S=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S=k \mid N=n)a_n$ par la formule des probas totales.

(*remarque* : en toute rigueur, on devrait sommer sur les n tels que $a_n>0$, à cause des $P(... \mid N=n)$).

Donc par 1), on obtient $P(S=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n=k)a_n t^k$.

Les séries considérées convergeant absolument (compte tenu du cas $t=1$).

Donc par Fubini, $G_s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n=k)t^k\right)a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} G_{S_n}(t)a_n$.

Comme les X_k sont indépendantes, $G_{S_n}(t) = G_X(t)^n$, donc $G_s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_X(t)^n a_n = G_N(G_X(t))$.

3) Par hypothèse, G_N et G_X sont dérivables en 1, et donc G_S est dérivable en 1.

Par la propriété du cours, S est d'espérance finie et

$$E(S) = G_S'(1) = G_X'(1)G_N'(G_X(1)) = E(X)E(N)$$

Exercice C

1) On a $\sum_{k=1}^{n} ka_k = \sum_{k=1}^{n} k(R_{k-1}-R_k) = \sum_{k=1}^{n} kR_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kR_k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)R_k - \sum_{k=1}^{n} kR_k$.

Donc $\sum_{k=1}^{n} ka_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n$.

La série $\sum R_n$ converge, et ainsi la suite $(\sum_{k=1}^{n} ka_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc converge.

2) Par 1) appliqué avec $p=0$, on a $nR_n = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - \sum_{k=1}^{n} ka_k \quad (*)$

$nR_n = n\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k_k \to 0$ comme reste d'une série convergente.

Autre méthode : $(nR_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge comme somme de suites convergentes (cf (*)).

Posons $L = \lim_{n\to+\infty}(nR_n)$. Si on avait L non nul, alors $u_n \sim \dfrac{L}{n}$, donc par comparaison, $\sum u_n$ divergerait.

On en conclut que $L=0$, c'est-à-dire $\sum_{n=1}^{+\infty} n(R_{n-1}-R_n) = \sum_{n=0 Rn}^{+\infty}$.

Remarque : On pourrait aussi prouver directement que $\lim_{n\to+\infty} nR_n = 0$, en utilisant que R_n décroit.

En effet, on a $R_n \leq \frac{2}{n}\sum_{k=\lfloor n/2\rfloor}^{n} R_k$, et on conclut par $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=\lfloor n/2\rfloor}^{n} R_k = 0$ (reste de la série cv).

Sachant que $\lim_{n\to+\infty} nR_n = 0$, on conclut par (*) que $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Remarque : En fait, la relation $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$ est immédiate si on admet Fubini :

$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$ valade car tous les termes sont positifs.

Exercice D

On a $|E(f(X)) - f(\mu)| = |E(f(X) - f(\mu))| \leq E(Y)$, où $Y = |f(X) - f(\mu)| \leq 2\,\|f\|_\infty$ d'espérance finie.

Considérons A l'événement $|X - \mu| \leq \alpha$.

On a alors $Y = Y.1_A + Y.1_{\overline{A}} \leq \varepsilon.1_A + 2\,\|f\|_\infty\,.1_{\overline{A}}$.

Donc $E(Y) \leq \varepsilon\ P(A) + 2\,\|f\|_\infty\ P(\overline{A}) \leq \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty\ P(\overline{A})$, d'où le résultat.

Exercice E

On a $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$ ssi $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}) = 0$.

Or, $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}) = \prod_{n=0}^{+\infty}(1 - a_n)$ par continuité décroissante appliquée au $B_n = \bigcap_{1\leq k\leq n} \overline{A_k}$.

Donc $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}) = 0$ ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - a_n) = -\infty$.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - a_n) = +\infty$ (série à termes négatifs divergente).

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $-\ln(1 - a_n) \sim a_n$. Comme $a_n \geq 0$, alors $\sum \ln(1 - a_n)$ diverge ssi $\sum a_n$ diverge.

Ainsi, dans les deux cas, $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$ ssi $\sum a_n$ diverge (vers $+\infty$).

Exercice F

1) a) Le DSE de exp donne $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n+2)!}$ qui définit sur $\mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞.

b) En particulier, $\forall x \in [-m, m]$, $f(x) \leq f(m)$, car tous les coefficients du DSE sont positifs.

c) Comme $x^2 \geq 0$, on a donc $\forall x \in [-m, m]$, $e^x \leq f(x)x^2 + 1 + x \leq f(m)x^2 + 1 + x$ valable aussi en $x = 0$.

Donc $E(e^X) \leq f(m)E(X^2) + 1 + E(X) = f(m) + 1$.

2) Soit $x \in [-m, m]$. On écrit $x = \alpha(-m) + \beta m$ avec $\alpha + \beta = 1$. Donc $a = \dfrac{(m - x)}{2m}$ et $\beta = \dfrac{(m + x)}{2m}$.

Par convexité de exp, $\exp(x) \leq \alpha e^{-m} + \beta e^m = \dfrac{(m - x)}{2m} e^{-m} + \dfrac{(m + x)}{2m} e^m$.

Par linéarité de l'espérance et comme $E(X) = 0$, on obtient $E(\exp(X)) \leq \dfrac{1}{2}(e^m + e^{-m})$.

Remarque : Cette inégalité est moins bonne que celle du 1), mais on avait en plus $E(X^2) = 1$).