Interrogation n°23. *Barème sur 24.5 pts*

Exercice A. Théorème du transfert **[1.5 pt]**

Soient une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ et $f : E \to \mathbb{R}$, où E est un ensemble au plus dénombrable.

On considère la variable aléatoire $f(X)$. Enoncer le théorème du transfert.

Exercice B. Formule de Wald **[7 pts]**

On suppose des variables aléatoires **entières indépendantes** N et X_n, où $n \in \mathbb{N}$.

On suppose les X_n de même loi que X. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(N = n)$ et $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k}$ et $\boxed{S = \sum_{k=1}^{N} X_k}$.

1) Montrer que $P(S = k \mid N = n) = P(S_n = k)$

2) Montrer que $\forall t \in [-1, 1]$, $G_S(t) = E(t^S) = G_N(G_X(t))$. On utilisera le théorème de Fubini.

3) En déduire que si X et N sont d'espérances finies, alors $E(S) = E(N)E(X)$.

Exercice C. Cas particulier de transformée d'Abel **[3.5 pts]**

Soit $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *positive* et *décroissante*. On pose $\forall n \geq 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n \geq 0$.

On suppose que $\sum R_n$ converge.

1) Montrer que si la série $\sum R_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 1} na_n$ converge.

Indication : Exprimer la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} ka_k$ en fonction de $\sum_{k=0}^{n-1} R_k$.

2) Montrer que la suite $(nR_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Exercice D **[2 pts]**

Soit X une variable aléatoire réelle. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On pose $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x - \mu| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(\mu)| \leq \varepsilon$.

Montrer que $|E(f(X)) - f(\mu)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty\ P(|X - \mu| \geq \alpha)$.

Exercice E. Cas particulier du lemme de Borel-Cantelli **[3.5 pts]**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé.

On pose $a_n = P(A_n)$ et on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < 1$.

Montrer que $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$ ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$.

Exercice F (*extrait ENS MP 2015*) (★) **[7 pts]**

Soit X une v.a. réelle à valeurs dans $[-m, m]$, où $m \geq 0$. *Les deux questions sont indépendantes.*

1) On pose $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

a) Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $f(X) \leq f(m)$.

c) On suppose $E(X) = 0$ et $E(X^2) = 1$. Déduire de b) que $E(\exp(X)) \leq 1 + f(m)$.

2) On suppose seulement $E(X) = 0$.

En utilisant une inégalité de convexité, montrer que $E(\exp(X)) \leq \dfrac{1}{2}(e^m + e^{-m})$.

Indication : Ecrire $x \in [-m, m]$ comme valeur moyenne de m et de $-m$.