Interrogation n°22 bis. Corrigé

Exercice A.

1) On considère $f_n(x) = \sin(nx)$. On a $f_n \in E$, et $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = 1 + n$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = +\infty$, et ainsi, N et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

2) L'équation homogène a pour solution $y'(x) = ke^x$. Avec $y(x) = z(x)e^x$, $(\mathcal{S})$ s'écrit $z'(x)e^x = f(x)$.

Les solutions de $(\mathcal{S})$ sont donc les $y(x) = e^x \left(k + \int_0^x f(t)e^{-t}\ dt\right)$.

3) φ est bien définie car $t \longmapsto e^{-t}f(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (car f bornée).

φ est solution de $(\mathcal{S})$ en prenant $k = -\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\ dt$.

4) Pour tout $x \geq 0$, on a $|\varphi(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\ \|f\|_\infty\ dt \leq \|f\|_\infty$.

Et comme $\varphi'(x) = \varphi(x) + f(x)$, alors $|\varphi'(x)| \leq 2\|f\|_\infty$. Donc $N(\varphi) \leq 3\ \|f\|_\infty$, et $K = 3$ convient.

Remarque : En fait, φ est l'unique solution de $(\mathcal{S})$ qui est bornée, car les autres solutions sont les $\varphi(x) + ke^x$, avec $k \neq 0$, donc qui divergent en $+\infty$.

Exercice B

1) Pour construire (k, l), on choisit k, et à k fixé, il y a $(n - k + 1)$ choix pour l.

Donc $\operatorname{card}\Delta = \sum_{k=0}^{n}(n - k + 1) = \sum_{j=0}^{n}(j + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$.

2) a) On choisit un point arbitraire $(x_0, y_0) \in \Omega$. Comme Ω est ouvert pour toute norme, donc pour la norme $\| \ \|_\infty$, donc il existe une boule $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ incluse dans Ω.

A fortiori, $I \times J =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ convient.

b) $P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} A_k(y)x^k$, où $A_k(y) = \sum_{l=0}^{n-k} a_{k,l}y^l$ polynôme en y de degré $\leq n - k$.

Soit $y_0 \in J$. On a $\forall x \in I$, $P(x, y_0) = 0$, et comme I est infini, alors $A_k(y_0) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

On fait varier y_0 dans J infini, donc tous les coefficients de A_k sont nuls. Donc les $a_{k,l}$ sont nuls.

c) On considère $u : \mathbb{R}^\Delta = (a_{k,l})_{(k,l)\in\Delta} \to E_n \quad (a_{k,l})_{(k,l)\in\Delta} \longmapsto P(x, y) = \sum_{(k,l)\in\Delta} a_{k,l}x^k y^l$

u est linéaire surjective (par def de E_n), et par b) appliquée à $\Omega = \mathbb{R}^2$, elle est injective.

Donc u est un isomorphisme et $\dim E_n = \dim(\mathbb{R}^\Delta) = \operatorname{card}\Delta$.

Exercice C

1) La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$, car $\ln'' < 0$.

Donc pour x et $y > 0$, $\ln\left(\dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q\right) \geq \dfrac{1}{p}\ln(x^p) + \dfrac{1}{q}\ln(y^q) = \ln(xy)$.

Comme exp est croissante, on obtient $xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$. L'inégalité est immédiate si $x = 0$ ou $y = 0$.

2) Si X et Y est presque sûrement nulle, il en est de même de XY et on a $E(XY) = 0$.

Supposons donc que ce n'est pas le cas. Alors $E(X^p) > 0$ et $E(Y^q) > 0$.

Par 1), on a $\dfrac{X}{E(X^p)^{1/p}}\ \dfrac{Y}{E(Y^q)^{1/q}} \leq \dfrac{1}{p}\dfrac{X^p}{E(X^p)} + \dfrac{1}{q}\dfrac{Y^q}{E(Y^q)}$.

Par linéarité et croissance de l'espérance, on obtient bien $\dfrac{E(XY)}{E(X^p)^{1/p}E(Y^q)^{1/q}} \leq \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.