Interrogation n°22 bis

Exercice A

On note E l'ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que f et f' sont bornées.

On pose $\|f\|_\infty = \sup_{[0,+\infty[} |f|$. On admet que $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est une norme sur E.

1) Montrer que les normes N et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

On fixe désormais f bornée.

2) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{S}) : y' - y = f(x)$.

3) En déduire que $\varphi(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt$ est solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle $(\mathcal{S})$.

4) Trouver une constante K indépendante de f telle que $N(\varphi) \leq K \ \|f\|_\infty$.

Exercice B. Polynômes de deux variables (*extrait Centrale PSI*)

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Δ_n l'ensemble des couples d'entiers $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k + l \leq n$.

Calculer $\operatorname{card} \Delta_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle fonction polynomiale de degré total $\leq n$ toute application $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forme :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad P(x, y) = \sum_{(k,l)\in\Delta_n} a_{k,l} x^k y^l$$

On note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré total $\leq n$.

2) Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que Ω contient une partie de la forme $I \times J$, où I et J sont deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$.

Remarque : La présence d'un dessin sera appréciée, mais ne constitue pas en tant que telle une preuve.

b) Soit $(a_{k,l})_{(k,l)\in\Delta_n} \in \mathbb{R}^{\Delta_n}$. On pose $P(x, y) = \sum_{(k,l)\in\Delta_n} a_{k,l} x^k y^l$.

On suppose $\forall (x, y) \in \Omega$, $P(x, y) = 0$. Montrer que tous les coefficients $a_{k,l}$ sont nuls.

Indication : Se ramener à des polynômes d'une variable.

c) En déduire la dimension de E_n.

Exercice C. Inégalité de Hölder

Soient deux réels strictement positifs p et q tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1) Soient x et $y \geq 0$. Montrer à l'aide d'une inégalité de convexité que $xy \leq \dfrac{1}{p} x^p + \dfrac{1}{q} y^q$.

2) Soient X et Y deux v.a. réelles à valeurs positives telles que $E(X^p) < +\infty$ et $E(Y^q) < +\infty$.

Montrer que $E(XY) \leq E(X^p)^{1/p} E(Y^q)^{1/q}$.

Indication : Se ramener au cas où $E(X^p) = E(Y^q) = 1$.