Interrogation n°22. Corrigé

Exercice A

1) Z_n est une v.a. positive et entière. Donc $P(Z_n \neq 0) = P(Z_n \geq 1) \leq E(Z_n)$ par Markov.

2) $(X_n \neq X) = \bigcup_{j \geq n}(Z_j \neq 0)$, donc $P(X_n \neq X) \leq \sum_{j=n}^{+\infty} P(Z_j \neq 0) \leq \sum_{j=n}^{+\infty} E(Z_j)$ par 1).

On a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=n}^{+\infty} E(Z_j) = 0$ (reste d'une série cv). Donc $\lim_{n\to+\infty} P(X_n \neq X) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = X) = 1$.

La suite des événéments $(X_n = X)$ est croissante et $(X < +\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X_n = X)$.

Par continuité croissante, on a donc $P(X < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = X) = 1$.

3) Par la propriété admise, on a $\sup_{t\in[-1,1]} |G_{X_n}(t) - G_X(t)| \leq 2P(X_n \neq X) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Donc la suite de fonctions $(G_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers G_X sur $[-1, 1]$.

4) Par le cours et indépendance des Z_j, X_n suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j$.

Donc $\forall t \in [-1, 1]$, $G_{X_n}(t) = \exp((t - 1)\mu_n)$.

Par convergence simple (car uniforme), on a $\forall t \in [-1, 1]$, $G_X(t) = \exp((t - 1)\mu)$, car $\mu = \lim_{n\to+\infty} \mu_n$.

Comme une série entière admet un unique DSE, alors X suit la loi de Poisson de paramètre μ.

5) a) On a $|1_{X_n>k} - 1_{X>k}| \leq 1_{X_n\neq X}$, car si $X_n(\omega) = X(\omega)$, alors a fortiori $(X_n(\omega) > k)$ ssi $(X(\omega) > k)$.

Donc $|P(X_n > k) - P(X > k)| = |E(1_{X_n>k} - 1_{X>k})| \leq E(|1_{X_n>k} - 1_{X>k}|) \leq E(1_{X_n\neq X}) = P(X_n \neq X)$.

b) Soit $K \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{k=0}^{K} P(X_n > k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n > k) = E(X_n) = \sum_{j=0}^{n} E(Z_j)$.

Par a), $\forall k$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n > k) = P(X > k)$, donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} P(X_n > k) = \sum_{k=0}^{K} P(X > k)$.

D'où le résultat par passage à la limite des inégalités larges.

c) Par b), la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} P(X_n > k)$ converge, donc X est d'espérance finie et $E(X) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} E(Z_j)$.

L'inégalité réciproque provient du passage à la limite de $\sum_{j=0}^{n} E(Z_j) = E(X_n) \leq E(X)$, car $X_n \leq X$.

Exercice B

1) a) - D'une part, $x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ est de classe C^1 comme primitive d'une fonction continue.

Donc A est de classe C^1 (comme produit de fonctions C^1), et $A'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

- D'autre part, $f : (x, t) \longmapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}$ est de classe C^1 en x, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.

Les fonctions $t \longmapsto f(x, t)$ et $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont bien sûr intégrables sur $[0, 1]$, car continues.

Pour tout $a > 0$, $\forall x \in [0, a]$, on a $\forall t \geq 0$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t)\right| \leq 2a = \varphi(t)$ intégrable sur $[0, 1]$.

Comme $a > 0$ est arbitraire, B est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, et $B'(x) = -2x \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)}\, dt$.

- La relation est vraie pour $x = 0$. Pour $x > 0$, avec le changement de variable $s = tx$, on a : $B'(x) = -2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2-s^2}\, ds = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = -A'(x)$.

b) Par convergence dominée, on a $\lim_{x\to+\infty} B(x) = 0$.

En effet, $\forall t \in [0, 1]$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2(1+t^2)} = 0$ et $\forall x > 0$, $e^{-x^2(1+t^2)} \leq 1 = \varphi(t)$ intégrable sur $[0, 1]$.

Or, par a), $A(x) = A(x) - A(0) = B(0) - B(x)$. Or, $B(0) = \int_0^1 \dfrac{dt}{1 + t^2} = [\arctan t]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Donc $\lim_{x\to+\infty} A(x) = \dfrac{\pi}{4}$. On en déduit que $G^2 = \dfrac{\pi}{4}$, et comme $G \geq 0$, alors $G = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Problème

1) a) Par comparaison, les fonctions considérées sont intégrables en $+\infty$ et en $+\infty$, car $O_{+\infty}(1/x^2)$.

- Avec le changement de variable affine $y = -x$, $\int_{-\infty}^{0} xG(x)\ dx = -\int_{0}^{+\infty} xG(x)\ dx$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xG(x)\ dx = 0$.

Remarque : On utilise en fait l'imparité de $x \longmapsto xG(x)$.

- Une primitive de $x\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ est $\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. Donc par IPP, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 G(x)\ dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[x\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\ dx = 1$.

Remarque : $\int_{0}^{+\infty} x^p \exp(-x^2/2)\ dx$ peut s'exprimer à l'aide de la fonction Γ avec le changement de variable bijectif $x = \sqrt{2y}$: on obtient $\sqrt{2}^{p+1}\int_{0}^{+\infty} y^{(p-1)/2}\exp(-y)\ dy = \sqrt{2}^{p+1}\Gamma((p+1)/2)$.

b) On a $G_\lambda(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}G\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\ dy = 1$ avec $y = \dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}$.
De même, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 G_\lambda(x)\ dx = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 G(y)\ dy = \lambda$. *Remarque* : Ainsi, la variance de la loi gaussienne G_λ vaut λ.

2) *Remarque* : La fonction f est bornée au voisinage de $+\infty$ et $+\infty$, car converge. Et f est bornée sur tout segment. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$. Posons $M = \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

a) - On fixe $x \in \mathbb{R}$. On pose $F(t) = f(x-t)p(t)$.

On a F continue et $F(t) = O_{+\infty}(p(t))$ et $F(t) = O_{-\infty}(p(t))$. Comme p est intégrable, F est intégrable.

- Montrons que $(f * p)$ est continue.

Première preuve (par les théorèmes sur les intégrales paramétrées) :

Posons $F(x,t) = f(x-t)p(t)$.

On a : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto F(x,t)$ est continue

domination : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x,t) \leq \|f\|_\infty\ p(t) = \varphi(t)$, et φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Seconde preuve : ici, on peut aussi déduire la continuité de l'uniforme continuité.

Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x-y| < \alpha$. On a donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(x-t) - f(y-t)| < \varepsilon$.

D'où $|(f*p)(x) - (f*p)(y)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon p(t)\ dt = \varepsilon$. A fortiori, $(f*p)$ est donc continue en tout point.

b) Posons $F_x(t) = f(x-t)p(t)$. On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} F_x(t) = 0$ car $\lim_{+\infty} f = 0$.

D'autre part, $|F_x(t)| \leq \|f\|_\infty\ p(t) = \varphi(t)$, et φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc par convergence dominée (pour un paramètre continu), $\lim_{x\to+\infty}(f*p)(x) = f(x)$.

3) a) *Remarque* : T_p est bien définie par 2) : si $f \in E$, alors $(f*p) \in E$. Et T_p est bien linéaire.

On a $|(f*p)(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_\infty\ p(t)\ dt = \|f\|_\infty$. Donc $\|T_p(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. La propriété est immédiate pour $n = 0$ car $T_p^0(f) = f$.

Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$.

On a $T_p^{n+1}(f) - T_q^{n+1}(f) = T_p^n(T_p(f)) - T_p^n(T_q(f)) + T_p^n(T_q(f)) - T_q^n(T_q(f))$.

Or, $T_p^n(T_p(f)) - T_p^n(T_q(f)) = T_p^n(T_p(f) - T_q(f))$.

Par a), $\left\|T_p^n(T_p(f) - T_q(f))\right\|_\infty \leq \|T_p(f) - T_q(f)\|_\infty$ en composant n fois l'inégalité du a).

D'autre part, $T_p^n(T_q(f)) - T_q^n(T_p(f)) = T_q(T_p^n(f)) - T_q(T_q^n(f))$ car T_p et T_q commutent.

Donc $\left\|T_p^n(T_q(f)) - T_q^n(T_p(f))\right\|_\infty = \left\|T_q(T_p^n(f) - T_q^n(f))\right\| \leq \left\|T_p^n(f) - T_q^n(f)\right\|_\infty$ par a).

Donc $\left\|T_p^n(T_q(f)) - T_q^n(T_p(f))\right\|_\infty \leq n \|T_p(f) - T_q(f)\|$ par a) et hyp de récurrence.

On déduit de l'inégalité triangulaire que $\left\|T_p^{n+1}(f) - T_q^{n+1}(f)\right\|_\infty \leq (n+1) \|T_p(f) - T_q(f)\|$.

Autre preuve : Comme $T_p \circ T_q = T_q \circ T_p$, on a $(T_p)^n - (T_q)^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (T_p)^k (T_q)^{n-1-k}\right) \circ (T_p - T_q)$.

Par a), les $(T_p)^k (T_q)^{n-1-k}$ sont 1-lipshcitzienne, donc $\left\|(T_p^{n+1} - T_q^{n+1})(f)\right\|_\infty \leq \|(T_p - T_q)(f)\|_\infty$.

Remarque : $T_p \circ T_q = T_q \circ T_p$ résulte en fait de Fubini (pour les intégrales abs convergentes) :

$(T_p \circ T_q)(f) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t-s)p(s)q(t)\right)\, ds\, dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t-s)q(s)p(t)\right)\, dt\, ds = (T_q \circ T_p)(f)$.

4) a) On a $(f * p_a)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)p_a(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u/a)p(u)\, du$, avec $t = u/a$.

Posons $H_a(u) = f(x-u/a)p(u)$. On a $\forall u \in \mathbb{R}$, $\lim_{a\to+\infty} H_a(u) = f(x)p(u)$ et $|H_a(u)| \leq \|f\|_\infty p(u) = \varphi(u)$.

Comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a par cv dominée, $\lim_{\lambda\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} H_a(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(u)du = f(x)$.

b) $\int_{|t|<r} p_a(t)\, dt = 2\int_r^{+\infty} ap(at)\, dt = 2\int_{ar}^{+\infty} p(t)\, dt \to 0$ lorsque a tend vers $+\infty$, car on a alors $ar \to +\infty$.

c) On a $\forall x$, $(f * p_a)(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)|\, p_a(t)\, dt$. Posons $M = \|f\|_\infty$.

On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe $r > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x-y| < r \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

On a $\forall x$, $|(f * p_a)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{|t|<r} p_a(t)\, dt + M \int_{|t|\geq r} p_a(t)\, dt \leq \varepsilon + M \int_{|t|\geq r} p_a(t)\, dt$.

Par b), $M \int_{|t|\geq r} p_a(t)\, dt. \leq \varepsilon$ pour a assez grand.

Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f * p_a)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour a assez grand.

Donc $\lim_{a\to+\infty} \sup_{\mathbb{R}} |(f * p_a) - f| = 0$, c'est-à-dire $(f * p_a)$ cv uniformément vers f lorsque $a \to +\infty$.