Interrogation n°22. *Barème sur 25 pts*

Exercice A (*inspiré Centrale MP 2017 et Centrale PSI 2015*)

Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose connue (cf interro n°21 bis) l'inégalité

$$\forall t \in [-1,1], \quad |G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2P(X \neq Y).$$

On considère une suite de variables entières $Z_n : \Omega \to \mathbb{N}$ d'espérances finies telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E(Z_n) < +\infty$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \sum_{j=0}^{n} Z_j$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et à valeurs entières.

Ainsi, $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est soit stationnaire soit tend vers $+\infty$. On note $X(\omega)$ la valeur limite (finie ou infinie).

1) [0.5 pt] Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Z_n \neq 0) \leq E(Z_n)$.

2) [2.5 pts] Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = X) = 1$ et en déduire que $P(X < +\infty) = 1$.

Ainsi, X est presque sûrement finie, et on peut considérer X comme une variable à valeurs entières.

3) [0.5 pt] Montrer que la suite de fonctions $(G_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers G_X sur $[-1,1]$.

4) [1.5 pt] *Un exemple.* Soit une série convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n$ de réels strictement positifs.

On suppose ici que les Z_n sont indépendantes, et que Z_n suit la loi de Poisson de paramètre λ_n.

Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$.

5) On revient au cas général.

a) [1 pt] Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|P(X_n > k) - P(X > k)| \leq P(X_n \neq X)$.

Indication : On pourra utiliser des fonctions indicatrices.

b) [1 pt] Sachant $\lim_{n\to+\infty} P(X_n \neq X) = 0$, montrer que $\forall K \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{K} P(X > k) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} E(Z_n)$.

c) [1 pt] En déduire que X est d'espérance finie et que $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(Z_n)$.

Exercice B. Calcul de l'intégrale de Gauss à l'aide d'une intégrale paramétrée

1) [3.5 pts] On pose $\forall x \geq 0$, $A(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$ et $B(x) = \int_0^1 \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

Montrer que A et B sont de classe C^1, et que $\forall x \geq 0$, $A'(x) = -B'(x)$.

Indication : On pourra notamment faire intervenir le changement de variable $s = tx$.

2) [2.5 pts] On pose $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$. Déduire de 1) que $G = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Problème. Convolution (*inspiré Mines PC 2010*)

1) On considère $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\ dx = 1$.

a) [2 pts] Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} xG(x)\ dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2G(x)\ dx$.

b) [0.5 pt] Pour $\lambda > 0$, on pose $G_\lambda(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\lambda}\right)$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} xG_\lambda(x)\ dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2G_\lambda(x)\ dx$.

Pour la suite de l'exercice, on utilise les notations suivantes :

- On note L l'ensemble des fonctions continues positives $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\ dt = 1$.

- On note E l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On sait que toute fonction $f \in E$ est bornée, et on munit E de la norme infinie $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

On admet que toute fonction $f \in E$ *vérifie la propriété d'uniforme continuité* :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

2) Pour $f \in E$ et $p \in L$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{(f * p)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)p(t)\ dt}$.

a) [1.5 pt] Justifier l'existence de $(f*p)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et la continuité de $(f*p)$ sur $\mathbb{R}$.

b) [1 pt] Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(f*p)(x) = .0$.

Remarque : On montre de même (*admis ici*) que $\lim_{x\to-\infty}(f*p)(x) = .0$.

3) Pour $p \in L$, on considère l'endomorphisme $T_p : E \to E \quad f \longmapsto f * p$.

On admet que $T_p \circ T_q = T_q \circ T_p$ pour toutes fonctions p et $q \in L$.

On note T_p^n l'endomorphisme obtenu en composant n fois l'endomorphisme T_p.

a) [0.5 pt] Montrer que $\forall f \in E$, $\|T_p(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

b) [2.5 pts] Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f \in E$, $\left\|T_p^n(f) - T_q^n(f)\right\|_\infty \leq n \|T_p(f) - T_q(f)\|_\infty$.

4) On considère $f \in E$ et $p \in L$. On pose $\forall a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $p_a(t) = ap\,(at)$.

a) [1 pt] Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer à l'aide d'un théorème de convergence dominée que $\lim_{a\to+\infty}(f*p_a)(x) = f(x)$.

b) [0.5 pt] Soit $r > 0$. Montrer que $\int_{|t|\geq r} p_a(t)\ dt$ converge vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$.

c) [1.5 pt] Montrer que $(f * p_a)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ lorsque a tend vers $+\infty$.