Interrogation n°21 bis. Corrigé

Exercice A

1) On a $b_{ij} = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_i} a_{ij}$ (la multiplication à droite par P multiplie la j-ième colonne par λ_j).

2) a) Compte tenu de a), il suffit de trouver des λ_j tels que $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $c_j \dfrac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} = b_j \dfrac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}}$.

On considère donc $\lambda_1 = 1$ et $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $\lambda_{j+1} = \sqrt{\dfrac{b_j}{c_j}} \lambda_j$, ce qui est valide car $\dfrac{b_j}{c_j} > 0$.

b) Par a), A est diagonalisable car semblable à une matrice symétrique réelle.

D'autre part, pour tout λ, on a $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$ car les b_j non nuls peuvent jouer le rôle de pivots.

Donc pour toute valeur propre λ, $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = 1$, c'est-à-dire le sev propre E_λ est une droite.

On en déduit que A admet n valeurs propres distinctes, et donc le polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice B

1) $P(A) - P(B) = E(1_A) - E(1_B) = E(1_A - 1_B)$.

Or, $|1_A - 1_B| = 1_{A \cap \overline{B}} + 1_{\overline{A} \cap B}$., Donc $|P(A) - P(B)| = |E(1_A - 1_B)| \leq E(|1_A - 1_B|) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$.

2) On a $\forall t \in [-1, 1]$, $|G_X(t) - G_Y(t)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |P(X = n) - P(Y = n)|$.

Par a), $|P(X = n) - P(Y = n)| \leq P(X = n, Y \neq n) + P(X \neq n, Y = n)$.

Or, par σ-additivité, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y \neq n) = P(X \neq Y)$ et de même $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X \neq n, Y = n)$.

Donc on obtient bien $\forall t \in [-1, 1]$, $|G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2P(X \neq Y)$.

Exercice C

1) a) on note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propre de A, avec $\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq ... \geq \lambda_n^2$.

On se place dans une BON formée de vecteurs propres de A.

En notant $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées de x dans cette base, on a $\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2$.

Donc $\|Ax\|^2 \leq \lambda_1^2 \|x\|^2$. Avec égalité lorsque x est un vecteur propre de valeur propre λ_1.

Donc $N_2(A) = |\lambda_1| = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

b) Il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $N_2(A) = |\lambda|$. Notons $x = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur propre.

On a $Ax = \lambda x$, donc $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$. On considère i tel que $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Comme x n'est pas nul, alors $|x_i| > 0$, donc $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \left| \dfrac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j=1}^n 1 = n$. D'où $N_2(A) \leq n$.

Cas d'égalité : Si on a égalité, on a nécessairement dans l'inégalité précédente les $|x_j|$.

quitte à divisier X par une constante non nulle, on peut supposer que $\forall j$, $|x_j| = 1$.

Comme $\forall i$, $nx_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, alors les $a_{ij} x_j$ sont de même signe que x_i et $a_{ij} = \pm 1$.

Donc $a_{ij} = x_i x_j$, c'est-à-dire $A = XX^T$.

Réciproquement si $A = XX^T$ avec X vecteur appartenant à $\{-1, 1\}^n$, alors A admet bien X comme vecteur propre de valeur propre n (car $AX = XX^T X = X \|X\|^2 = nX$) et ainsi $N_2(A) = n$.

En conclusion, les cas d'égalité sont les matrices symétriques de rang 1 à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

2) $\operatorname{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{2^n n!} = \exp\left(\dfrac{1}{2}t^2\right)$,

car $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n n! = 2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n) \leq (2n)!$

3) a) On a par la formule du transfert $E(\exp(bv)) = \dfrac{1}{2}e^b + e^{-b} = \operatorname{ch} b$.

b) On a $u\ x^T A x = \sum_{i,j} u x_i x_j a_{ij} = \sum_{i=1}^n u x_i^2 a_{ii} + 2\sum_{i<j} u x_i x_j a_{ij}$.

Comme les v.a. a_{ij}, avec $i \leq j$, sont indépendantes, les $\exp(u x_i x_j a_{ij})$ le sont aussi.

Donc $E(\exp(u\ x^T A x)) = \prod_{i=1}^n E(u x_i^2 a_{ii}) \prod_{i<j} E(2u x_i x_j a_{ij}) = \prod_{i=1}^n \operatorname{ch}(u x_i x_j) \prod_{i<j} \operatorname{ch}(2u x_i x_j a_{ij})$.

c) D'où, par 2), on obtient :

$E(\exp(u\ x^T A x)) \leq \exp\left(\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n u^2 x_i^4 + \sum_{i<j} 2u^2 x_i^2 x_j^2\right) \leq \exp\left(\sum_{i=1}^n u^2 x_i^4 + \sum_{i<j} 2u^2 x_i^2 x_j^2\right)$.

Or, par Fubini, $\sum_{i=1}^n x_i^4 + 2\sum_{i<j} 2u^2 x_i^2 x_j^2 = \sum_{i,j} x_i^2 x_j^2 = \left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_j x_j^2\right) = \|x\|_2^2 \|x\|_2^2 = \|x\|_2^4$.

Donc $E(\exp(u\ x^T A x) \leq \exp(u^2 \|x\|_2^4)$.

4) a) On a $\forall u > 0$, $P(x^T A x \geq \alpha\sqrt{n}) = P(\exp(u\ x^T A x) \geq \exp(u\alpha\sqrt{n}))$ car $t \longmapsto \exp(ut)$ strict croissante.

On a $\exp(u\ x^T A x)$ variable positive, donc par Markov et par 3) c),

$$P(\exp(u\ x^T A x) \geq \exp(u\alpha\sqrt{n})) \leq \frac{E(\exp(u\ x^T A x))}{\exp(u\alpha\sqrt{n})} \leq \exp(u^2 \|x\|_2^4 - u\alpha\sqrt{n})$$

b) On choisit $u > 0$ de sorte à minimiser $u \longmapsto u^2 \|x\|_2^4 - u\alpha\sqrt{n}$.

On prend donc $u = \dfrac{\alpha\sqrt{n}}{2\|x\|_2^4}$, et on déduit de a) l'inégalité demandée.

5) En effet, A et $-A$ ont même loi, donc $x^T A x$ et $-x^T A x$ ont même loi.

Donc $P(x^T A x \leq -\alpha\sqrt{n}) = P(x^T A x \geq \alpha\sqrt{n})$.

Remarque : De façon générale, une somme de variables aléatoires symétriques *et* indépendantes est symétrique.

6) a) Soit $x \in S$. Il existe $k \in [\![1, N]\!]$ tel que $\|x - v_k\|_2 \leq \dfrac{1}{3}$.

Posons $y = x - v_k$. On a $\left|y^T A y\right| = |\langle y, Ay\rangle| \leq \|y\|_2 \|Ay\|_2 \leq N_2(A) \|y\|_2^2 \leq \dfrac{1}{9}N_2(A)$.

De même, $\left|v_k^T A y\right| = \left|y^T A v_k\right| \leq N_2(A) \|y\|_2 \|v_k\|_2 \leq \dfrac{1}{3}N_2(A)$.

Or, $x^T A x = (y + v_k)^T A (y + v_k) = v_k^T A v_k + y^T A y + v_k^T A y + y^T A v_k$.

Donc $\left|x^T A x\right| \leq \left|v_k^T A v_k\right| + \dfrac{1}{9}N_2(A) + \dfrac{1}{3}N_2(A) + \dfrac{1}{3}N_2(A) \leq M_A + \dfrac{7}{9}N_2(A)$.

b) Par a), $N_2(A) \leq \dfrac{7}{9}N_2(A) + M_A$, donc $N_2(A) \leq \dfrac{9}{2}M_A$, et ainsi $(N_2(A) \geq t) \subset \left(M_A \geq \dfrac{2}{9}t\right)$.

c) $(M_A \geq \beta\sqrt{n}) = \cup_{0 \leq k \leq N}\left(\left|v_k^T A v_k\right| \geq \beta\sqrt{n}\right)$.

La probabilité d'une union est inférieure ou égale à la somme des probabilités.

Donc $P(M_A \geq \beta\sqrt{n}) \leq \sum_{k=1}^N P(v_k^T A v_k \geq \beta\sqrt{n}) \leq 2N \exp\left(-\dfrac{\beta^2 n}{4}\right)$.

Par b), $P(N_2(A) \geq \alpha\sqrt{n}) \leq P(M_A \geq \dfrac{2\alpha}{9}\sqrt{n}) \leq 2N \exp\left(-\dfrac{\alpha^2 n}{81}\right) \leq 2\exp\left(\left(\log 7 - \dfrac{\alpha^2}{81}\right)n\right)$.

Il suffit donc de choisir α tel que $\log 7 - \dfrac{\alpha^2}{81} < 0$, c'est-à-dire $\alpha > 9\sqrt{\log 7}$.