Interrogation n°21 bis

Exercice A. Matrices tridiagonales

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P = \text{Diag}(\lambda_1, .., \lambda_n) \in GL_n(\mathbb{R})$. Expliciter les coefficients de $B = P^{-1}AP$.

2) On considère une matrice tridiagonale réelle

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

telle que $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\boxed{b_i c_i > 0}$.

a) Montrer que A est semblable à une matrice tridiagonale symétrique.

b) Montrer que A est diagonalisable et que les sev propres de A sont de dimension 1.

Que peut-on en déduire quant au polynôme caractéristique de A ?

Exercice B

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé.

1) Soient A et B deux événéments. Montrer que $|P(A) - P(B)| \leq P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$.

Indication : Utiliser $1_A - 1_B$.

2) Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer : $\sup_{t \in [-1,1]} |G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2P(X \neq Y)$.

Exercice C. Matrices symétriques aléatoires (concours spécial 2022 ENS Lyon)

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique $\|x\|_2$ et on pose $S = \{x \in \mathbb{R}^r \mid \|x\|_2 = 1\}$.

Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose

$$N_2(A) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \in \mathbb{S}} \|Ax\|_2 \qquad \text{et} \qquad N_\infty(A) = \sup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$$

1) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique.

a) Montrer que $N_2(A) = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$. *Remarque* : Propriété vue en cours

b) ($\bigstar$) On suppose $N_\infty(A) \leq 1$. Montrer que $N_2(A) \leq n$, et caractériser les cas d'égalité.

Dans la suite, on suppose que $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est une matrice symétrique réelle dont les coefficients supérieurs $(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ forment une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, P) de même loi de Rademacher :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad P(a_{ij} = -1) = P(a_{ij} = 1) = 1/2$$

Le but des questions suivantes est de montrer que $N_2(A) =_{n=+\infty} O(\sqrt{n})$ *avec une grande probabilité, ce qui améliorer fortement le résultat de la question 1) b).*

2) En utilisant les DSE, montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

3) On fixe un vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et un réel $u \geq 0$.

a) Soit b une variable aléatoire de Rademacher et v un réel. Expliciter $E(\exp(bv))$.

b) Exprimer l'espérance $E(\exp(u\ x^T Ax)$ sous la forme d'un produit de cosinus hyperboliques.

c) En déduire que $E(\exp(u\ x^T Ax) \leq \exp(u^2 \|x\|_2^4)$.

4) On fixe un vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

a) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et tout $\alpha > 0$, $P(x^T Ax \geq \alpha\sqrt{n}) \leq \exp(u^2 \|x\|_2^4 - u\alpha\sqrt{n})$.

b) En déduire que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$P(x^T Ax \geq \alpha\sqrt{n}) \leq \exp\left(-\frac{\alpha^2 n}{4\|x\|_2^4}\right)$$

5) On fixe un vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. En utilisant 4) b), montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$P(\left|x^T Ax\right| \geq \alpha\sqrt{n}) \leq 2\exp\left(-\frac{\alpha^2 n}{4\|x\|_2^4}\right)$$

Afin de traiter la dernière question de ce problème, on admet qu'il existe un entier $N \leq 7^n$ *et des vecteurs* $v_1, ..., v_N \in S$ *tels que*

$$\forall x \in S,\ \exists k \in [\![1, N]\!],\quad \|x - v_k\|_2 \leq \frac{1}{3}$$

6) On pose $M_A = \max_{1\leq k\leq N} \left|v_k^T A v_k\right|$.

a) Montrer que $\forall x \in S$, $\left|x^T Ax\right| \leq \frac{7}{9} N_2(A) + M_A$.

Indication : Posons $x = v_k + y$ et développer $x^T Ax$ (on obtient 4 termes).

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $P(N_2(A) \geq t) \leq P(M_A \geq \frac{2}{9}t)$.

c) A l'aide des questions précédentes, déterminer un réel $\alpha > 0$ indépendant de n tel que

$$\lim_{n\to+\infty} P(N_2(A) \geq \alpha\sqrt{n}) = 0$$