**Interrogation n°21. Corrigé**

**Exercice A. Matrices de Hadamard**

**1)** $A^T A$ est la matrice des produits scalaires canoniques $\langle A_i, A_j \rangle$.

On a $|\langle A_i, A_j \rangle| \leq n$ car $\langle A_i, A_j \rangle$ s'écrit comme somme de $n$ termes appartenant à $[-1, 1]$.

On a ainsi $N_\infty(A^T A) \leq n$. On prend alors $X = E_1$. Alors $A^T A E_1$ est la première colonne de $A^T A$.

Donc tous ses coefficients sont $\leq n$ en valeur absolue, c'est-à-dire $\left\|A^T A E_1\right\|_\infty \leq n$.

On conclut : $k = k \left\|E_1\right\|_\infty \leq \left\|A^T A E_1\right\|_\infty \leq n$.

**2)** a) On a $\operatorname{tr}(A^T A) = \sum_{i,j} a_i a_j$, donc $\operatorname{tr}(A^T A) \leq n^2$.

b) Soit $X$ un vecteur propre de $A^T A$ de valeur propre $\lambda$.

On a $\left\|A^T A X\right\|_\infty = |\lambda| \left\|X\right\|_\infty$, et comme $\left\|X\right\|_\infty > 0$, alors $n \leq |\lambda|$ car $\left\|A^T A X\right\|_\infty \geq n \left\|X\right\|_\infty$.

Comme $A$ est symétrique positive, alors $n \leq \lambda$.

c) Notons $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de $A^T A$. On a $\forall j$, $\lambda_j \geq n$ mais $\operatorname{tr}(A^T A) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq n^2$.

On en déduit que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_j = n$.

Donc $A^T A$, qui est diagonalisable, admet $n$ comme unique valeur propre. D'où $A^T A = n I_n$.

En particulier, on a $\forall j$, $A_j^T A_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = n$, et comme $a_{ij}^2 \leq 1$, alors $a_{ij}^2 = 1$ pour tous $(i, j)$.

On a donc bien $|a_{ij}| = 1 = 1$.

**3)** a) $A$ doit être de la forme $\sqrt{2} U$, où $U \in O_2(\mathbb{R})$ matrice orthogonale.

Donc les matrices 2-Hadamard sont les $A = (\pm X, \pm Y)$ et $(\pm Y, \pm X)$, avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Il y a donc 8 matrices 2-Hadamard.

b) Supposons que $A_{p-1}$ est une matrice $n$-Hadamard de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ avec $m = 2^{p-1}$.

Alors $A_p = \left(\begin{array}{c|c} A_{p-1} & -A_{p-1} \\ \hline A_{p-1} & A_{p-1} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $n$-Hadamard avec $n = 2m = 2^p$.

**Exercice B**

**1)** Comme $\binom{n}{k} \geq 1$, alors $k!(n-l)! \leq n!$ d'où le résultat en composant par $t \longmapsto t^s$ croissante sur $\mathbb{R}^+$.

**2)** a) La fonction nulle appartient à $G_s(T)$.

Soient $f$ et $g \in G_s(T)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $M$, $N$, $R$ et $S > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], \left|f^{(n)}(t)\right| \leq \frac{M(n!)^s}{R^n} \text{ et } \left|g^{(n)}(t)\right| \leq \frac{N(n!)^s}{S^n}$$

Posons $m = \max(M, N)$ et $r = \min(R, S)$.

Posons $F(t) = \lambda f(t) + \mu g(t)$. On a $\left|F^{(n)}(t)\right| \leq \dfrac{m(|\lambda| + |\mu|)(n!)^s}{r^n}$.

$\left|F^{(n)}(t)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left|f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)\right| \leq MN \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{(k!)^s}{r^k} \dfrac{((n-k)!)^s}{r^{n-k}} = \dfrac{MN}{r^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k!(n-k)!)^s.$

Par 1), $\left|F^{(n)}(t)\right| \leq \dfrac{MN}{r^n} 2^n (n!)^s = \dfrac{MN}{(r/2)^n} (n!)^s$. D'où $F \in G_s(T)$.

*Variante* : $\left|F^{(n)}(t)\right| \leq MN(n!)^s \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{1}{R^k} \dfrac{1}{S^{n-k}} = \dfrac{MN(n!)^s}{T^n}$, où $\dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{S}$.

**3)** a) Soit $(t,x) \in [0,T] \times [0,+\infty[$ Posons $a_n = \dfrac{f^{(n)}(t)x^{2n}}{(2n)!}$. On a $|a_n| \leq \dfrac{M(n!)^s x^{2n}}{R^n (2n)!} = |b_n|$.

On a $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \sim \dfrac{n^s x^2}{4Rn^2} \to 0$, donc par D'Alembert, la série $\sum b_n$ converge.

Par comparaison, $\sum a_n$ converge absolument, d'où l'existence de $H(t,x)$.

*Remarque* : Ainsi, à $t$ fixé, le rayon de convergence de la série entière (en $x$) vaut $+\infty$.

b) Posons $F_n(x,t) = f^{(n)}(t) \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

- On fixe $x \in \mathbb{R}$. On a $\dfrac{\partial F_n}{\partial t}(x,t) = f^{(n+1)}(t) \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

La série $t \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\partial F_n}{\partial t}(x,t)$ converge normalement sur $[0,T]$ :

En effet, $c_n = \sup_{t\in[0,T]} \left|\dfrac{\partial F_n}{\partial t}(x,t)\right| \leq \dfrac{M((n+1)!)^s x^{2n}}{R^n(2n)!}$ et comme au a), la série $\sum c_n$ converge.

Donc $\dfrac{\partial H}{\partial t}$ existe et on a $H(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\partial F_n}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n+1)}(t) \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

- On fixe $t \in \mathbb{R}$. On a aussi $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = f^{(n)}(t) \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ et $\dfrac{\partial^2 F_n}{\partial x^2}(x,t) = f^{(n)}(t) \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$.

Par a), les séries $x \longmapsto \sum \dfrac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ et $x \longmapsto \sum \dfrac{\partial^2 F_n}{\partial x^2}(x,t)$ convergent pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De plus, la série $x \longmapsto \sum \dfrac{\partial^2 F_n}{\partial x^2}(x,t)$ converge normalement sur tout segment $[-\rho,\rho]$.

En effet, $c_n = \sup_{x\in[-\rho,\rho]} \left|\dfrac{\partial^2 F_n}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \dfrac{Mn^s \rho^{2n-2}}{R^n(2n-2)!}$ et comme au a), la série $\sum c_n$ converge.

Donc $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ existe et on a $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} f^{(n)}(t) \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n+1)}(t) \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = \dfrac{\partial H}{\partial t}$.

*Autre argument* pour $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ :

L'application en $x$ est par aà) une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$.

Elle est donc par le cours de classe $C^\infty$, et on peut dérivéer $x \longmapsto H(t,x)$ terme à terme.

c) Pour prouver la continuité de $H$, on utilise la caractérisation séquentielle :

Supposons $\lim_{k\to+\infty}(t_k,x_k) = (t,x)$ dans $[0,T] \times \mathbb{R}$.

Posons $A_n(k) = F_n(t_k,x_k)$. On a $\lim_{k\to+\infty} A_n(k) = F_n(t,x)$.

La suite $(|x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel $\rho$.

On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $|A_n(k)| \leq a_n = \dfrac{M(n!)^s \rho^{2n}}{R^n(2n)!}$ et par a), la série $\sum a_n$ converge.

Par le th de la double limite (ici pour une série de fonctions de la variable entière $k$), on a :

$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{k\to+\infty} A_n(k)$. Donc $\lim_{n\to+\infty} H(t_k,x_k) = H(t,x)$.