Interrogation n^{o}20 bis. Corrigé

Exercice A

1) a) Soit $x \in E$. L'application $\varphi : y \longmapsto \langle x, u(y)\rangle$ est une forme linéaire, donc il existe un unique vecteur a tel que $\forall y \in E\ \varphi(y) = \langle a, y\rangle$. Donc on a nécessairement $v(x) = a$, d'où l'unicité de v.

b) Reste à prouver que v ainsi définie est linéaire.

On a $\langle v(\lambda x + \mu y), z\rangle - \lambda \langle v(x), z\rangle - \mu \langle v(y), z\rangle = \langle \lambda x + \mu y - \lambda x - \mu y, u(z)\rangle = 0$.

Comme z est arbitraire, $v(\lambda x + \mu y) - \lambda v(x) - \mu v(y)$. Donc v est linéaire.

c) Par symétrie du produit scalaire, on a $v^T = u$.

2) Supposons F stable par u. Soit $x \in F^\perp$. On a $\forall y \in F$, $\langle v(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$, donc $v(x) \in F^\perp$.

Donc $F^\perp$ est stable par v.

Réciproquement, si $F^\perp$ est stable par v, alors $F = (F^\perp)^\perp$ est stable par $v^T = u$.

Exercice B

1) On fixe y. On considère $F : x \longmapsto \int_0^1 f(t, x, y)\ dt$. L'application $x \longmapsto f(t, x, y)$ est de classe C^1.

En dominant par $\forall x$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x, y)\right| \leq \varphi(t) = \sup_{(t,x)\in[0,1]^2} |f(t, x, y)|$, on en déduit que F est de classe C^1 et $F'(x) = \int_0^1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x, y)\ dt$.

On en déduit que $\dfrac{\partial J}{\partial x}(x, y)$ existe et vaut $\int_0^1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x, y)\ dt$.

Il reste à prouver la continuité de $(x, y) \longmapsto \dfrac{\partial J}{\partial x}(x, y)$: on utilise la caractérisation séquentielle :

Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers (x, y) dans $[0, 1]^2$. On pose $I_n = \dfrac{\partial J}{\partial x}(x_n, y_n) = \int_0^1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x_n, y_n)\ dt$.

Par convergence dominée par $\varphi(t) = \sup_{(t,x,y)\in[0,1]^3} |f(t, x, y)|$, on a $\lim_{n\to+\infty} I_n == \int_0^1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x, y)\ dt$.

De même pour $\dfrac{\partial J}{\partial y}(x, y)$. On en déduit que J est de classe C^1.

2) $S(x, y)$ est bien définie par comparaison, car $|f_n(x, y)| \leq M_n = \sup_{[0,1]^2} |f_n|$.

On utilise la caractérisation séquentielle : Soit $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers (x, y) dans $[0, 1]^2$.

Posons $u_n(k) = f_n(x_k, y_k)$. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $|u_n(k)| \leq M_n$.

Premier argument : On a $k \longmapsto \sum u_n(k)$ conberge normalement donc uniforémment sur $\mathbb{N}$.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to+\infty} u_n(k) = f_n(x, y)$.

Par le théorème de la double limite, $\lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(k)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{k\to+\infty} u_n(k)$.

On obtient donc $\lim_{k\to+\infty} S(x_k, y_k) = S(x, y)$, et S est continue.

Second argument : La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(k)$ peut être vue comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi_k(t)\ dt$ d'une fonction en escaliers, avc $\varphi_k(t) = u_{\lfloor t\rfloor}(k)$. On a $\lim_{k\to+\infty} \varphi_k(t) = \varphi(t)$ et $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x, y) = S(x, y)$.

On a $|u_n(k)| \leq M_n$ et $\sum M_n$ converge, donc par convergence dominée, $\lim_{k\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_k(t)\ dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\ dt$.

Exercice C

1) On a $Y_v = \langle v, X\rangle = \sum_{i=1}^n v_i X_i$, donc par linéarité, $E(Y_v) = 0$.

Remarque : Autrement dit, par linéarité de la forme linéaire E, on a : $E(\langle v, X\rangle) = \langle v, E(X)\rangle$.

On a $(Y_v)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n v_i v_j X_i X_j$, donc $E((Y_v)^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n v_i v_j E(X_i X_j)$, et $E(X_i X_j) = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

2) On a $\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n v_i v_j \,\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E((Y_v)^2) \geq 0$, d'où le résultat.

3) En décomposant v dans une base orthonormée de vecteurs propres, on a (cf Hausdorffien) :

$\max(\mathrm{Sp}(M)) = \sup_{\|v\|=1} \ \langle v, Mv\rangle$, d'où le résultat par 2).

4) On a par un calcul analogue $E(Y_v Y_w) = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n v_i w_j E(X_i X_j) = \langle v, Mw\rangle$.

Ainsi, $E(Y_v Y_w) = 0$ lorsque $\langle v, Mw\rangle = 0$.

Ce qui est réalisé si on choisit une BON $(v_1, ..., v_n)$ de vecteurs propres de M : $\langle v_i, Mv_j\rangle = \lambda_j \delta_{ij}$.

Exercice D

1) Pour $1 \leq k \leq 4$, on a $|X|^k \leq \max(1, X^4) \leq 1 + X^4$, donc X^2 et X^3 sont d'espérances finies.

2) On a $E(Y_n) = 0$, donc $E(Y_n^2) = V(Y_n) = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_n) = \dfrac{Kn}{n^2} = \dfrac{K}{n}$.

Par l'inégalité de Tchebychev : $P(|Y_n| \leq \varepsilon) \leq \dfrac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{K}{n\varepsilon^2}$.

3) a) Pour construire un tel quadruplet :

- On choisit la paire $\{\alpha, \beta\}$, avec $\alpha < \beta$, des deux valeurs prises par (i, j, k, l). Il y a $\binom{n}{2}$ choix.

- Puis on choisit la position des deux éléments valant α : il y a $\binom{4}{2}$ choix

- Il reste un seul choix pour les autres éléments, qui valent β.

Donc $N = \binom{n}{2}\binom{4}{2} = \frac{1}{2}n(n-1) \times 6 = 3n(n-1)$.

Par exemple, lorsque $n = 2$, il y a $6 = \binom{4}{2}$ quadruplets $(1, 1, 2, 2)$, $(1, 2, 1, 2)$, etc ...

b) On a $Y_n^4 = \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,k,l} X_i X_j X_k X_l$. Mais $E(X_i X_j X_k X_l) = 0$ sauf (éventuellement) des deux cas :

- les i, j, k, l sont tous égaux : il y a n choix.

- les i, j, k, l se répartissent en deux paires distinctes de terme égaux : il y a N choix.

Donc $E(Y_n^4) = \dfrac{nL}{n^4} + \dfrac{N}{n^4}K^2 = \dfrac{L}{n^3} + \dfrac{3(n-1)}{2n^3}K^2$, donc $E(Y_n^4)$ est en $O(\dfrac{1}{n^3})$.

c) On a $P(|Y_n| \geq \varepsilon) = P(Y_n^4 \geq \varepsilon^4)$.

Y_n^4 est une variable positive, donc par l'inégalité de Markov, $P(Y_n^4 \geq \varepsilon^4) \leq \dfrac{E(Y_n^4)}{\varepsilon^2} = O(\dfrac{1}{n^2})$ par b).

d) $\overline{A_{\varepsilon,m}} = \bigcup_{n \geq m} (|Y_n| \geq \varepsilon)$, donc $P(\overline{A_{\varepsilon,m}}) \leq \sum_{n=m}^{+\infty} P(|Y_n| \geq \varepsilon)$.

Or, pâr a), la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|Y_n| \geq \varepsilon)$ converge, donc le reste tend vers 0.

Donc $\lim_{m\to+\infty} P(\overline{A_{\varepsilon,m}}) = 0$.

e) $B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^+} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{1/k,m}$.

La suite $(A_{1/k,m})_{k\in\mathbb{N}^*}$ croit. Par continuité croissante, $P\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{1/k,m}\right) = \lim_{m\to+\infty} P(A_{1/k,m}) = 1$ par b).

Par continuité décroissante, $P(B) = 1$.